EUCLIDES



VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAR

NR.3

JAARGANG 94 - DECEMBER 2018



Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 94 NR.3



IN DIT NUMMER



'Lobke' ontworpen door Koos Verhoeff. Dit is een van zijn drie objecten die voor het Mathematikon in Heidelberg staan.
Zie ook: https://www.geton.nl/de/nachrichten/skulpturen-gefertigt-fur-mathematikon-heidelberg/

Foto: Tom Verhoeff

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN



Kort vooraf

De dag dat ik dit schrijf, 16 november, is een beetje een historische dag. Er vindt namelijk in Japan de eerste landelijke wiskunde Alympiade plaats, waaraan ongeveer vijftig teams uit heel Japan deelnemen. Hiermee komt een lang gekoesterde wens van Minoru Ohtani in vervulling, dertien jaar nadat hij in Nederland voor het eerst de Alympiade meemaakte op een aantal scholen. Door de Alympiade hoopt Minoru een discussie op gang te brengen over het Japanse wiskunde-curriculum, dat nu (nog) heel formeel is. In Nederland is dertig jaar geleden de Alympiade door Jan de Lange met dezelfde reden bedacht: het toetsen van procesvaardigheden die niet met een examen getoetst kunnen worden. Een aantal van die procesvaardig-heden maakt nu deel uit van de *21st century skills*. En daar is *Computational Thinking* er ook een van. Langzaam maar zeker ontstaat het besef dat we daar in het wiskundeonderwijs iets aan kunnen doen, zie het artikel van Mark Timmer en Joris van der Meulen in deze *Euclides* over Computational Thinking in vwo 5.
Ook in deze *Euclides* een nieuwe serie: 'Rijtjes met witte en zwarte ballen' door Rob Bosch. Wiskunde, gewoon omdat het mooi is. En de komende dagen kun je de problemen die Rob beschrijft ook best met kerstballen simuleren. Namens de hele redactie van *Euclides* wens ik je mooie en luisterrijke feestdagen!

Tom Goris

HERINNERINGEN AAN KOOS VERHOEFF

Tom Verhoeff

Op 19 maart 2018 overleed Koos Verhoeff. Zijn zoon Tom Verhoeff herdacht hem op de Bridges conferentie afgelopen zomer in Stockholm met deze tekst. Op de komende Nationale Wiskunde Dagen is er een expositie van het werk van Koos Verhoeff.



figuur 1 Koos Verhoeff, schilderij van zijn kleindochter Amy Verhoeff (let op de rook)

Levensloop

Koos Verhoeff is geboren op 27 februari 1927 in Den Haag, in een wijk waar alle straten genoemd waren naar bomen. Zijn vader was financieel medewerker in de zuivelindustrie en hij was een ervaren amateurfotograaf. Koos ging naar drie verschillende scholen, allemaal in de bomenwijk. Door de Tweede Wereldoorlog was zijn schoolloopbaan enigszins 'chaotisch'. Op jonge leeftijd al ontwikkelde hij een bijzondere interesse voor meetkunde, en bestudeerde hij de leerboeken van zijn oudere broer. Meteen na de oorlog ging Koos wiskunde, natuurkunde en astronomie studeren in Leiden, waar hij zijn kandidaats in twee jaar haalde. Zijn studie werd onderbroken door de militaire dienst, hij moest naar Indonesië, destijds nog Nederlands-Indië. Gelukkig kon hij daar de assistent worden van prof. Zaanen aan de Technische Universiteit van Bandung. Na deze duistere periode, waar hij nooit over sprak, keerde hij terug en ging wiskunde en filosofie studeren aan de Universiteit van Amsterdam, waar hij in 1952 afstudeerde.
Daarvoor was hij al aangesteld bij het Mathematisch Centrum, het huidige CWI (Centrum voor Wiskunde & Informatica) in Amsterdam, als onderzoeker in de zuivere wiskunde.[1] Daar maakte hij kennis met de computer, het programmeren én met zijn toekomstige echtgenote Bertha Haanappel, die daar werkte als rekenaarster.
Ze trouwden in 1955.



figuur 2 Bertha Haanappel en Koos Verhoeff (28 november 1952). Verlovingsfoto gemaakt door Koos' vader

In 1957 werd hij hoofdonderzoeker bij een bibliotheek automatiseringsproject op de Technische Universiteit Delft. Hij ontwikkelde een innovatief systeem,[2] waarbij een code van een boek ingegeven werd die vervolgens via lichtjes de bibliothecaris naar de gewenste kast en plank leidde. In zijn proefschrift uit 1969[3] construeerde hij een decimale foutdetecterende code, waarvan eerder 'bewezen' was dat die niet kon bestaan, door handig gebruik te maken van het niet-Abels zijn van de groep D5 met 10 elementen.
In 1970 ontwierp hij het A-nummer, de voorloper van het SoFi-nummer en het huidige Burger Service Nummer

(BSN), waar hij een artikel over publiceerde dat voor leerlingen nog steeds een mooie bron voor coderingen is. Na een korte periode bij Philips te hebben gewerkt aan de automatisering van fabrieksprocessen, werd hij in 1971 hoogleraar informatica (algemene informatieverwerking) aan de Erasmus Universiteit te Rotterdam, als opvolger van Max Euwe.
Daar introduceerde hij de computer in het academische curriculum en vestigde hij meteen de aandacht op het gebruik van computers voor recreatieve doeleinden. In zijn openingslezing van de Boekenweek[4] in 1978 kondigde hij het verdwijnen van het gedrukte boek aan als belangrijkste middel van kennisoverdracht en introduceerde hij termen als 'leestablet' en 'hypertekst'. In Rotterdam raakte Koos wederom betrokken bij de automatisering van bibliotheken, nu door gebruik te maken van microprocessors in plaats van relaisschakelingen en buizen om robots aan te sturen die de boeken in plastic bakken transporteerden. In 1988 ging hij met emiritaat om zich vervolgens helemaal te wijden aan het ontwerpen en construeren van wiskundige kunst.

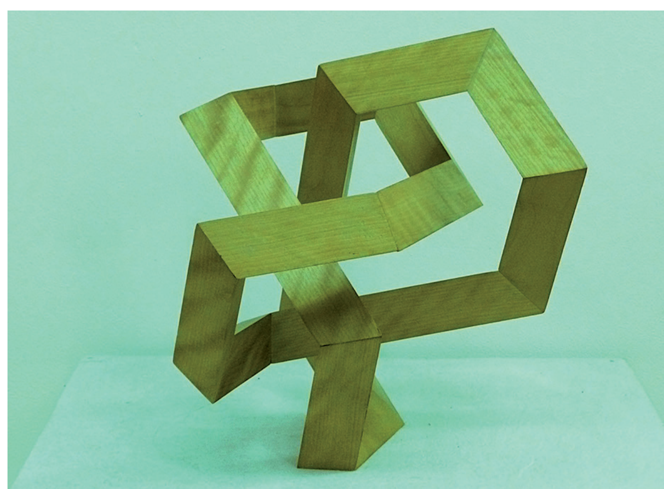
'KOOS ZAG ZICHZELF NIET ZOZEER ALS EEN CREATIEVE KUNSTENAAR MAAR MEER ALS EEN ONTDEKKER, DIE WISKUNDIGE RUIMTES VERKENT.'

Wiskunstenaar

Het begon allemaal toen kunstenaar Popke Bakker in het begin van de jaren tachtig een probleem voorlegde over gesloten ruimtelijke paden met verstekverbindingen. Koos rekende een aantal ontwerpen door voor Popke, die Popke vervolgens uitvoerde. Maar Popke had geen zin om de driehoekige knoop, zie figuur 3, te maken omdat daar driezijdige balken in voorkwamen. Dat was het moment waarop Koos besloot zélf aan de slag te gaan.
Dé uitdaging bij het maken van gesloten ruimtelijke paden met balken en verstekverbindingen is, om ervoor te zorgen dat de (langs)ribben van die balken overal aansluiten.[5] Gaandeweg ontstaat er een *torsie:* iedere verbinding spant een vlak op en de gerichte hoek tussen de vlakken van twee opeenvolgende verbindingen heet de torsie van de balk tussen die verbindingen. De som van al die torsiehoeken moet een symmetrie zijn van de doorsnede van de balk: dat garandeert een perfecte aansluiting.
Er zijn drie typerende momenten te onderscheiden in het proces waarin Koos met deze uitdaging omging. Allereerst ging hij *tinkeren*. Hij parametriseerde zijn ontwerpen en ging vervolgens spelen met de posities van de verbindingshoekpunten om te kijken of die aansloten. In deze fase kunnen de balken en de hoeken nog de meest woeste waarden hebben.
De driehoeksknoop in figuur 3 is er een voorbeeld van. Het maken van de vereiste berekeningen is een langdradige klus en bij het vervaardigen van een kunstwerk moeten de instellingen van de gereedschappen voor iedere balk gewijzigd worden.
Om de berekeningen en de constructies te vereenvoudigen nam Koos zijn toevlucht tot *roosterpaden* die lopen over de punten in een kristalrooster, zoals het primitief kubisch (PK), *vlak gecentreerd kubisch* (VGK) en het *ruimtelijk gecentreerd kubisch* (RGK) rooster. Dit levert een veel betere controle over de totale torsiehoek op en het beperkt het aantal mogelijke soorten balken aanzienlijk.
In figuur 4 is een acht-achtige knoop te zien, gebaseerd op een RGK rooster. Koos vergeleek deze benadering met het navigeren door een stad met een kaart.



figuur 3 Zespootje, een klaverbladknoop met minimaal aantal balken



figuur 4 Balanceerkunst, een vrijstaande achtknoop



figuur 5 $(++--)^4$, een regelmatige veelhoek met constante torsie

Later ontdekte Koos dat er een directere manier is om de torsiehoek in de vingers te krijgen, zonder gebruik te maken van een rooster. In deze benadering gebruik je alleen maar torsiehoeken die een symmetrie zijn van de dwarsdoorsnede van de balken,[6] zodat de perfecte aansluiting gegarandeerd wordt. Koos vergeleek dit met het navigeren door de woestijn met een kompas. Helaas is daarbij het precies terugkeren op de beginlocatie dan niet meer zo eenvoudig als bij het navigeren in de stad. Het regelmatige veelvlak met een constante torsie in figuur 5 is daar een voorbeeld van.

In dit kunstwerk hebben alle balken een vierkante doorsnede, dezelfde lengte, dezelfde verbindingshoek en een torsie van ± 90° waarbij het teken vier keer de reeks ++ – – volgt. De enige vrijheid die overblijft is dan de verbindingshoek tussen twee balken. Het blijkt dat je die zo kunt kiezen dat het pad precies terugkomt bij het begin. En dan is het automatisch gegarandeerd dat alle naden netjes aansluiten.

Koos ontwierp en construeerde veel meer dan alleen gesloten paden in de ruimte. Zie [7] en alle bijdragen die we samen schreven voor de Bridges conferentie.[8] t/m [15]

Hij zag zichzelf niet zozeer als een creatieve kunstenaar maar meer als een ontdekker, die wiskundige ruimtes verkent en slechts interessante en intrigerende structuren daaruit koos die op de een of andere manier altijd al bestonden. Naast het laten zien van de schoonheid van de wiskunde wilde hij voornamelijk iedereen zich laten verwonderen en laten denken. Koos overleed, 91 jaar oud, in zijn slaap op 19 maart 2018.

Het oeuvre van Koos wordt beheerd door Stichting Wiskunst Koos Verhoeff, zie *wiskunst.dse.nl*

Noten

[1] Verhoeff, J. (1953). On Pseudo-Convergent Sequences. *Ned. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A., (Indigationes Math.), (15).*

[2] Verhoeff, J. (1966). The Delft Circulation System. *Libri, (16)*1, pp. 1–9.

[3] Verhoeff, J. (1969). Error Detecting Decimal Codes. Ph.D. Dissertation. University of Amsterdam: Amsterdam. *https://ir.cwi.nl/pub/13046.*

[4] Huysman. P. (1978, 4 maart). Professor Koos Verhoeff: Het boek blijft bestaan, net als de kwispedoor... Provinciale Zeeuwse Courant, p. 21. *https://krantenbankzeeland.nl/issue/pzc/1978-03-04/edition/0/page/21.*

[5] Verhoeff, T. (2010). 3D Turtle Geometry: Artwork, Theory, Program Equivalence and Symmetry. *International Journal of Arts and Technology, (3)*2/3, pp. 288–319.

[6] Verhoeff T. & Verhoeff, K. (2008). The Mathematics of Mitering and its Artful Application. *Bridges Conference Proceedings*. Leeuwarden, Netherlands, pp. 225–234. *http://archive.bridgesmathart.org/2008/bridges2008-225.html*

[7] Verhoeff T. & Verhoeff, K. (2009). Regular 3D Polygonal Circuits of Constant Torsion. *Bridges Conference Proceedings*, Banff, Canada, pp. 223–230. *http://archive.bridgesmathart.org/2009/bridges2009-223.html*

 [8] t/m [15] Zie de *Euclides-site* voor alle links.

Over de auteur

Tom Verhoeff studeerde wiskunde en werkt als universitair docent bij de faculteit Wiskunde & Informatica van de Technische Universiteit Eindhoven. Geïnspireerd door het werk van zijn vader houdt hij zich tegenwoordig ook bezig met wiskundige kunst.

VIJF VRAGEN AAN...



In de rubriek Vijf vragen aan ... leren we docenten wiskunde beter kennen. Waarom hebben ze voor het vak gekozen? Wat inspireert hen? Hebben ze nog tips voor collega's? Deze keer vijf vragen aan Martin Kindt.

Martin Kindt

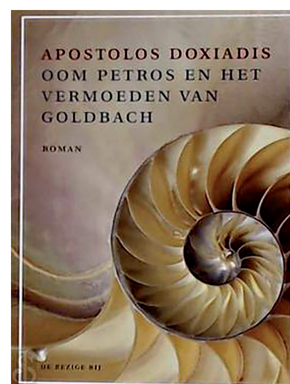
1 Wie heeft of hebben de meeste invloed gehad op jouw keuze van een loopbaan in het wiskunde-onderwijs?

'Mijn twee wiskundeleraren waren het zeker niet. De een was streng en cynisch, de ander aardig maar saai. Het was het vak - en dan vooral de meetkunde - dat mij van begin af aan intrigeerde. Na het behalen van het einddiploma besloot ik met wiskunde door te gaan en ik koos voor een avondstudie in de actuariële wiskunde met overdag een baan bij een verzekeringsbank. Ofschoon het werk inhoudelijk interessant was, besefte ik na enige tijd dat dit niet mijn toekomst kon zijn. Tijdens de met veel tegenzin vervulde militaire dienstplicht, kwam ik er achter dat lesgeven mij wel lag en na het afzwaaien wilde ik zo snel mogelijk de zogeheten MO-akten wiskunde halen. Ik deed een avondopleiding in Rotterdam en een van de leraren, Dono Kijne, inspireerde mij enorm. Of het nu analyse, algebra of meetkunde betrof, zijn colleges waren speels en avontuurlijk en toen wist ik het zeker: ik word leraar. Later als beginnend leraar volgde ik in de jaren na 1963 de heroriënteringscursussen van de toenmalige CMLW[1] en werd Frederik van der Blij een groot voorbeeld voor mij. Natuurlijk moet je als leraar niet imiteren maar je eigen stijl ontdekken en evolueren, en dat was altijd mijn credo. Op didactisch gebied wilde ik, eigenwijs als ik was, in de eerste plaats alles zélf uitvinden. Toen ik later in aanraking kwam met de ideeën zoals die leefden binnen het IOWO[2], bleken die zozeer aan te sluiten bij de ontwikkeling die ik inmiddels zelf had doorgemaakt, dat ik de kans om aldaar te werken met beide handen aangreep. Het leraarschap miste ik wel, maar zo'n dertig jaar lang meetkundelessen geven op een avond-lerarenopleiding compenseerde dat gemis enigszins.'

> 'LAAT JE LEERLINGEN VOORTDUREND BESEFFEN DAT ZE BIJ WISKUNDE NIETS OP GEZAG HOEVEN AAN TE NEMEN.'

2 Welk verhalend boek over wiskunde zou jij collega's aanraden te lezen?

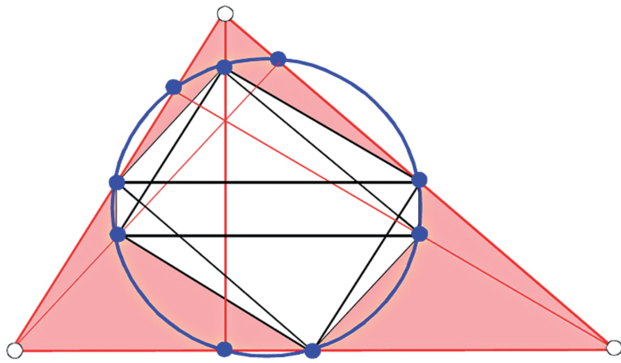
'*Oom Petros en het vermoeden van Goldbach* van de Griekse auteur Apostolos Doxiados, die trouwens ook het stripverhaal Logicomix heeft geschreven, dat ik dan en passant maar als goede tweede benoem.
Het eerstgenoemde boek verhaalt van een man, door zijn familie als 'loser' beschouwd, die ooit als zeer getalenteerd wiskundige zodanig gegrepen was door Goldbachs vermaarde vermoeden dat hij zijn leven geheel richtte op het vinden van een bewijs daarvan. Via zijn neef, die in het verleden van zijn oom duikt, wordt zijn tragische missie uit de doeken gedaan, waarbij diverse helden uit de geschiedenis van de getaltheorie en de logica langskomen.'



3 Welke meetkundige stelling heeft voor jou schoonheid en verrassing?

'Dat zijn er talloze en het hangt van mijn stemming af welke ik noem. Bovendien koppel ik een oordeel ook graag aan de elegantie van het bewijs. Maar goed, een van de eerste stellingen waar ik mij over verbaasde was de negenpuntsstelling van Feuerbach, die zegt dat de voetpunten van zowel de hoogtelijnen als de zwaartelijnen in een driehoek, samen met de drie middens van de hoogtelijnstukken (van hoekpunt naar hoogtepunt) op één en dezelfde cirkel liggen.

In de figuur op de volgende bladzijde kan de lezer met een beetje inspanning een bewijs ontdekken.'



4 Welk kunstwerk moet volgens jou door elke wiskundeleraar gezien worden?

‘Tja, is er speciale schilderkunst voor wiskundigen? Natuurlijk, er zijn veel interessante en prachtige werken die vanuit de perspectiefleer interessant zijn, en waarbij je na het uitvinden van de precieze positie van het (ene) oog je de diepte als sensatie ervaart, en daar past dan mooie meetkunde bij. Maar hier wil ik het schilderij noemen, waar ik het moeilijkst afscheid van kon nemen in het museum, namelijk Picasso’s Guernica.
Ooit zag ik dit in het Museo Reina Sofia in Madrid, waar je eerst langs een aantal voorstudies van Picasso wordt geleid om dan plotseling oog in oog met dit aangrijpende en magistrale werk te staan. Het onderwerp, de vernietiging van een Baskisch dorp in 1937 door Duitse en Italiaanse bommenwerpers, is even gruwelijk als actueel. Hoewel ik talloze keren verkleinde reproducties had gezien, werd ik volkomen overweldigd door de aanblik van het origineel. Het is misschien wat ver gezocht, maar ik kan het niet laten om hier een parallel met wiskundeonderwijs te trekken. Aan kant-en-klare wiskundeteksten of theorieën zijn veel voorstudies voorafgegaan.
In het (hoger) onderwijs, krijg je daar meestal weinig van te zien. Maar juist de gang langs de voorstudies, zoals in het Spaanse museum, verdiept de beleving bij en het inzicht in het eindproduct.

5 Welk advies geef jij je collega’s?

Wees geen slaaf van het boek, daag je leerlingen voortdurend uit, straal uit dat je wiskunde een prachtvak vindt (wat het natuurlijk ook is) en … het allerbelangrijkste: laat je leerlingen voortdurend beseffen dat ze bij wiskunde niets (althans buiten definities en conventies) op gezag hoeven aan te nemen en dat het ‘waarom’ veel belangrijker is dan het ‘hoe’.



Noten

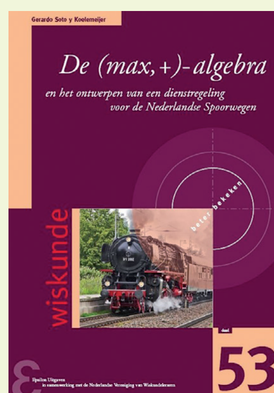
[1] Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde
[2] Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs, de (eerste) voorloper van het Freudenthal Instituut

Pablo Picasso, Guernica 1937

VERSCHENEN

DE (MAX, +) - ALGEBRA

Titel: De (max, +) - algebra
Ondertitel: Zebra 53
Auteur: Gerardo Soto y Koelemeijer
Uitgever: Epsilon uitgaven (2018)
ISBN: 978-90-5041-172-1
Prijs: € 10,00 (68 pagina’s; paperback)



Van de uitgever:
De symbolen + en × zijn bedacht door mensen. Maar wat als we die symbolen nu een andere betekenis geven? Wat als de keer een optelling wordt en de plus het maximum van twee getallen? Kunnen we dan nog wiskunde bedrijven of raakt de wiskunde dan ontspoord? Het blijkt dat we op deze manier een nieuwe algebra hebben ontwikkeld, waarin alles net wat anders werkt dan in de gewone algebra. En met deze nieuwe algebra, de (max,+)-algebra, kunnen we, met behulp van matrices, een dienstregeling ontwerpen voor bijvoorbeeld een treinnetwerk. Ga je mee op reis?

KLEINTJE DIDACTIEK

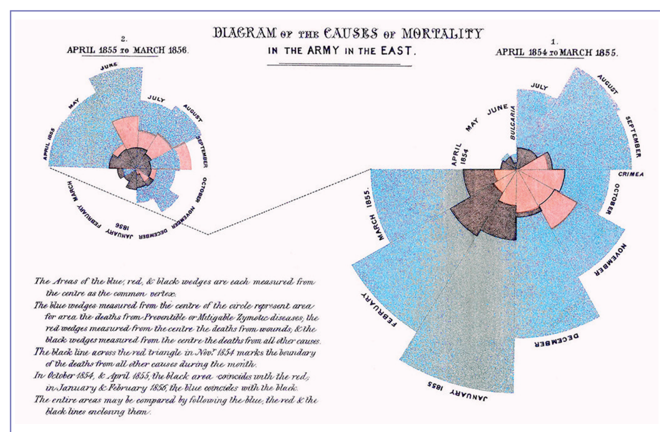
Lonneke Boels

STATISTIEK KAN LEVENS REDDEN

Statistiek kan levens redden en heeft dat in de geschiedenis ook een aantal malen gedaan. Zowel op school als tijdens een gastcollege statistiek op de Universiteit Utrecht vertel ik vaak meerdere verhalen over hoe statistiek levens kan redden. In deze Kleintje Didactiek deel ik er twee.

Gewonde soldaten

Het eerste verhaal is van de misschien wel beroemdste statisticus: Florence Nightingale. Zij trof erbarmelijke omstandigheden aan in de ziekenhuizen met gewonde soldaten tijdens de Krimoorlog. Er waren geen bedden, onvoldoende dekens en de kookhygiëne liet zwaar te wensen over. Met haar - onder statistici zeer beroemde - *polar graph*, zie figuur 1, liet zij zien dat er meer soldaten overleden aan vermijdbare ziekten zoals cholera en bevriezing dan aan oorlogswonden. Hiermee overtuigde ze de geldschieters waarna dekens, bedden en schoon keukengerei werden aangeschaft en het aantal doden ten gevolge van deze vermijdbare ziekten spectaculair daalde.

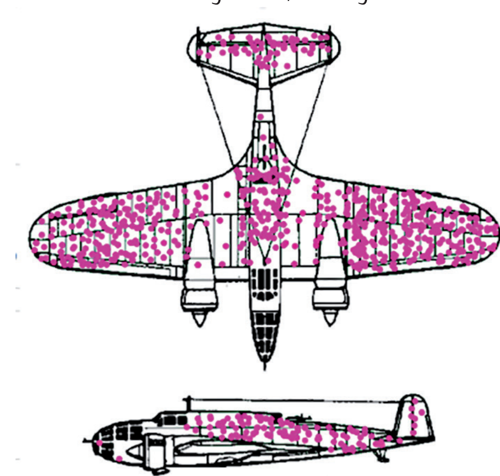


figuur 1 De beroemde *polar graph* van Florence Nightingale. Van april 1854 tot maart 1855

De grafiek geeft aan hoeveel personen er in de Krimoorlog overlijden door kogelwonden (rood), vermijdbare ziekten zoals cholera, dysenterie, bevriezing, en tyfus (blauw) en overige oorzaken (zwart). Elke maand in het jaar is een sector (deel) van de cirkel. De oppervlakte is proportioneel met het aantal doden door de ziekten. De linkergrafiek is de grafiek van de oorzaak van overlijden van april 1855 tot maart 1856, een jaar nadat Florence Nightingale cijfers was gaan bijhouden. De invloed van haar beleid om de omstandigheden te verbeteren is duidelijk te zien doordat het blauwe deel is afgenomen en uiteindelijk zelfs helemaal is verdwenen.

Kogelgaten in vliegtuigen

Het tweede verhaal is van de wiskundige en statisticus Abraham Wald. Hij redde levens van vele piloten. In de Tweede wereldoorlog werden bommenwerpers die terugkwamen geïnspecteerd op kogelgaten zodat kon worden beoordeeld waar deze moesten worden versterkt. Waar veel kogelgaten zaten, werd extra beplating aangebracht. Abraham Wald kwam op het idee om juist de plekken te versterken waar weinig kogelgaten zaten. De vliegtuigen die namelijk niet terugkeerden, waren geraakt op vitale onderdelen en neergestort, zie figuur 2.[1]



figuur 2 Voorbeeld van kogelgaten in teruggekeerde bommenwerpers

De plekken waar geen kogelgaten zaten, o.a. de motor en brandstoftanks, moesten volgens Wald extra worden versterkt. Dit leidde tot een toename van het aantal vliegtuigen - en dus piloten - die terugkeerden.
Dit laatste voorbeeld werd ook besproken in het programma van Ionica Smeets en Sofie van den Enk: *Eureka, Hoe word ik honderd?* (Tussen 3:10 en 4:40)

Noten

[1] *https://www.squawkpoint.com/2015/01/sample-bias/*
[2] *https://www.npo3.nl/eureka/17-10-2013/KRO_1644526?*

WERELDWISKUNDEFONDS, EFFECTIEF AAN HET WERK

Evert van de Vrie

Dit jaar bestaat het Wereldwiskunde Fonds (WwF) 25 jaar. Ter gelegenheid daarvan is een boekje gemaakt, dat onder andere is uitgereikt op de jaarvergadering van de NVvW op 3 november jl. In dat boekje zijn de doelstellingen en impact van het WwF belicht. Die worden bereikt door een effectieve werkwijze, aldus voorzitter Evert van de Vrie.





Werkwijze

De doelstellingen van het WwF staan vermeld op de site van de NVvW. Ook zijn daar de expliciete criteria opgenomen waarop projectvoorstellen worden beoordeeld. Het WwF richt zich primair op de verbetering van het wiskundeonderwijs op middelbaar schoolniveau in landen waar men over zeer beperkte middelen beschikt. Aanschaf van boeken en de training van leraren zijn bijvoorbeeld activiteiten die voor subsidiëring in aanmerking komen. De procedure is simpel. Er is een format beschikbaar voor projectvoorstellen. Een projectvoorstel wordt door, of in overleg met, de betrokkenen opgesteld en ingediend bij het bestuur van het Wereldwiskunde Fonds. Het bestuur bespreekt het voorstel, vraagt eventueel meer informatie op en besluit over acceptatie. En dan kan het project van start.

Het gaat bijna altijd om relatief beperkte subsidies in de orde van twee tot vijfduizend euro. Inspectie ter plekke is dan ook niet mogelijk, maar door rapportage en financiële verantwoording raakt het bestuur op de hoogte over de besteding van de middelen en de bereikte effecten. Omdat het bestuur vrijwilligerswerk is, komt 100% van de middelen ten goede aan de projecten.

Financiering

De financiële middelen komen op twee manieren beschikbaar. Enerzijds is er het jaarlijkse verzoek aan de leden van de NVvW om bovenop hun contributie wat extra te betalen voor het WwF. Dit in navolging van de oproep van de eerste WwF-voorzitter Hans Wisbrun: 'Wij willen meer contributie betalen!'. Aan de oproep wordt nog steeds op grote schaal gehoor gegeven en de resulterende inkomsten vormen een fors deel van de beschikbare financiën. Daarnaast is er al vanaf het begin van het WwF de doorverkoop van wiskundeboeken. Wiskundigen die van hun boeken af willen (of moeten) stellen ze ter beschikking aan het WwF. Door veilingen worden de boeken verkocht aan nieuwe geïnteresseerden. Driedubbel effect: oude boeken vinden nieuwe eigenaren, nieuwe eigenaren zijn blij met hun aanwinsten, en de kas van het WwF wordt weer wat verder gevuld. Ook hier is het allemaal vrijwilligerswerk, zodat er niets aan de strijkstok blijft hangen.

Toekomst

In het jublieumboekje staan enkele bespiegelingen over de toekomst. Tegelijkertijd blijft het bestuur zich steeds afvragen: doen we de goede dingen, doen we het op de goede manier, zijn er nieuwe activiteiten nodig?

Wil je ook bijdragen aan het werk van het WwF? Meld je dan aan als lid van het bestuur, of gebruik je connecties in ontwikkelingslanden om een projectvoorstel in te dienen, teneinde het wiskundeonderwijs wereldwijd weer een stapje te verbeteren.

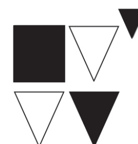
Over de auteur

Evert van de Vrie is voorzitter van het Wereldwiskunde Fonds.
E-mailadres: *Evert.vandeVrie@ou.nl*

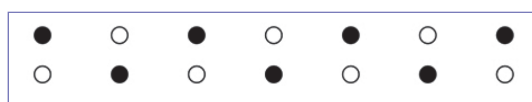
RIJTJES MET WITTE EN ZWARTE BALLEN I

Rob Bosch

Wiskunde, gewoon omdat het mooi is. Rob Bosch bedrijft wiskunde met witte en zwarte ballen en schrijft daar een serie miniaturen over.

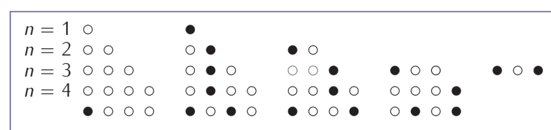


We maken een rijtje met witte en zwarte ballen. Daarbij geldt de beperking dat er geen twee opeenvolgende zwarte ballen in het rijtje mogen voorkomen. In het voorbeeld van figuur 1 voldoen de rijtjes van zeven ballen aan de gestelde eis.



figuur 1

De voor de hand liggende vraag is; hoeveel van dergelijke rijtjes zijn er met n ballen (wit of zwart)? Het is niet direct duidelijk welke strategie we voor de oplossing moeten volgen. Om een idee te krijgen, schrijven we de rijtjes voor $n = 1; 2; 3; 4$ even op, zie figuur 2.



figuur 2

Als we het aantal rijtjes met n ballen aangeven met r_n dan zien we dat[1]

$r_1 = 2 \quad r_2 = 3 \quad r_3 = 5 \quad r_4 = 8$

Hierin herkennen we een bekend patroon. Maar ja, zet dit patroon zich door en zo ja, hoe kunnen we dat patroon dan verklaren?

Rijtjes met n ballen zijn er in twee soorten. De eerste soort begint met een witte bal en de tweede soort begint met een zwarte bal. Als een rijtje met een witte bal begint dan kunnen we het rijtje aanvullen met alle rijtjes met $n - 1$ ballen. Het aantal rijtjes van de eerste soort is dus gelijk aan r_{n-1}. Als een rijtje begint met een zwarte bal dan moet de tweede bal wit zijn. Hierna kunnen we het rijtje weer aanvullen met alle rijtjes met $n - 2$ ballen. Het aantal rijtjes van de tweede soort is dus gelijk aan r_{n-2}. Voor het aantal rijtjes r_n met n ballen geldt dus:

$r_n = r_{n-1} + r_{n-2} \quad n = 3, 4, \ldots$

Dit is de Fibonacci-relatie die we kennen van de rij van Fibonaccigetallen

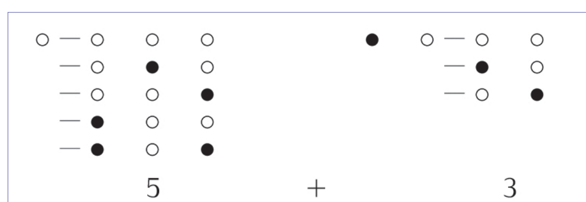
1 1 2 3 5 8 13 21 ...

waarin ieder getal de som is van zijn twee voorgangers. Als we deze Fibonaccigetallen aangeven met F_n dan zien we dat $r_1 = 2 = F_3$, $r_2 = 3 = F_4$ en $r_4 = 8 = F_6$. Voor het aantal rijtjes met n ballen vinden we verrassend een Fibonaccigetal. Voor een rijtje met n ballen geldt:

$r_n = F_{n+2} \qquad n = 1, 2, \ldots$

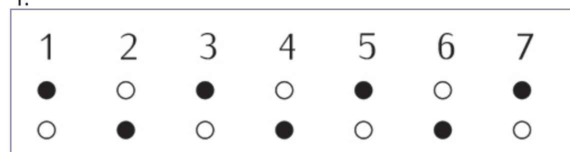
Het bovenstaande argument illustreren we hieronder voor een rijtje met vier ballen.

Aantal rijtjes met 4 ballen = aantal rijtjes met 3 ballen + aantal rijtjes met 2 ballen = 5+3 = 8, zie figuur 3.



figuur 3

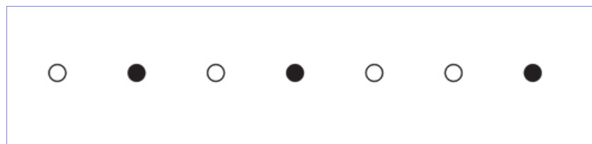
Met het resultaat van het aantal rijtjes met witte en zwarte ballen kunnen we eenvoudig het aantal deelverzamelingen bepalen van $N_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ waarin geen opeenvolgende getallen voorkomen. We nummeren de ballen uit het eerste voorbeeld van 1 t/m 7, zie figuur 4.



figuur 4

De zwarte ballen in de twee rijtjes corresponderen dan met de deelverzamelingen $\{1, 3, 5, 7\}$ en $\{2, 4, 6\}$ van de verzameling $N_7 = \{1, 2, \ldots, 7\}$. Omgekeerd kunnen we iedere deelverzameling van N_7 die geen opeenvolgende getallen bevat, voorstellen als een rijtje witte en zwarte ballen zonder opeenvolgende zwarte ballen.

Zo hoort bij de deelverzameling {2, 4, 7} het rijtje van figuur 5:



figuur 5

We hebben hiermee een één-één-correspondentie tussen de deelverzamelingen zonder opeenvolgende getallen en de rijtjes met witte en zwarte ballen zonder opeenvolgende zwarte ballen. Het aantal deelverzamelingen van N_7 zonder opeenvolgende getallen is dus gelijk aan $F_9 = 34$. Merk nog op dat het rijtje met uitsluitend witte ballen correspondeert met de lege deelverzameling. De bovengenoemde één-één-correspondentie geldt, zoals we eenvoudig nagaan, voor iedere verzameling N_n. Het aantal deelverzamelingen van N_n zonder opeenvolgende getallen is gelijk aan het Fibonaccigetal F_{n+2}.

Noot

[1] Voor het lege rijtje $n = 0$ kunnen we nog opnemen dat $r_0 = 1$. Dat is dan in lijn met het feit dat er bij een verzameling precies één lege deelverzameling is.

Over de auteur

Rob Bosch was universitair hoofddocent wiskunde aan de Nederlandse Defensie Academie en is thans lid van de redactie van *Euclides*.
E-mailadres: *dr.robbert.bosch@gmail.com*

COMPUTATIONAL THINKING IN VWO 5

EEN WERKMIDDAG OVER 'BRANCH AND BOUND'

Mark Timmer
Joris van der Meulen

Joris van der Meulen volgde de masteropleiding Science Education and Communication aan de Universiteit Twente en sloot deze opleiding af met een 'Onderzoek van Onderwijs' over *Computational Thinking*. Hij ontwikkelde en evalueerde hiertoe een werkmiddag voor vwo 5, over het algoritme-ontwerp-paradigma 'Branch and Bound'. In dit artikel doet hij samen met Mark Timmer, de begeleider van het project, verslag van de resultaten.

Aanleiding

In de wiskundeles wordt er regelmatig gewerkt aan het reproduceren van technieken om bepaalde problemen op te lossen, zoals een functie differentiëren om een maximum te vinden of de sinusregel gebruiken om een hoek te bepalen. Uiteraard is dat zinvol, maar minstens zo belangrijk is het om leerlingen zelf na te laten denken over hoe *nieuwe* problemen opgelost kunnen worden. In hun latere beroepsleven zal daarbij regelmatig gebruik worden gemaakt van technologie en zal de computer het daadwerkelijke rekenwerk doen. Zaak is daarbij natuurlijk wel, dat die computer op de juiste wijze geprogrammeerd wordt. Een manier om leerlingen hierop voor te bereiden is om ze bepaalde programmeertalen te leren. In het huidige tijdperk waarin technologische ontwikkelingen razendsnel gaan is het echter wellicht nog belangrijker om deze programmeertalen te overstijgen en leerlingen te scholen in 'computational thinking'.

'COMPUTATIONAL THINKING IS "HOT", EN HET LIJKT ONS GOED OM DIT ONDERWERP OOK BIJ WISKUNDE OP TE PAKKEN.'

De term computational thinking wordt in verschillende contexten gebruikt. Wij hanteren de definitie van Jeannette M. Wing uit 2006[1], waarin het omschreven wordt als 'the thought processes involved in formulating a problem and expressing its solution(s) in such a way that a computer – human or machine – can effectively carry out.' Het omvat dus in ieder geval algoritmisch denken: het procesmatig formuleren van de oplossingsstrategie voor een bepaalde groep problemen zodat een computer ermee uit de voeten kan. Hierbij moet ook gedacht worden aan zaken als abstractie, heuristieken, efficiëntie en complexiteitstheorie. Immers, zonder begrip van dit soort zaken is het niet mogelijk om een goed algoritme te bedenken.
Hoewel er in de wiskundeles over het algemeen niet veel geprogrammeerd wordt, is computational thinking wel een vaardigheid die prima binnen het vak wiskunde past. Ook SLO heeft dat recentelijk opgemerkt, zoals onder andere beschreven in WiskundE-brief 782.[2] De vraag is echter of er op dit moment al genoeg materiaal is om leerlingen daadwerkelijk met dit onderwerp aan de slag te laten gaan.
Dit alles was aanleiding voor het ontwikkelen van een werkmiddag voor vwo 5, waarin computational thinking centraal staat. Het centrale concept in de opdracht was 'branch and bound', een algoritme-ontwerp-paradigma uit de besliskunde.

Branch and bound

Branch and bound is een algoritme-ontwerp-paradigma waarmee optimalisatieproblemen correct en vaak efficiënt opgelost kunnen worden, doordat complete enumeratie (alle potentiële oplossingen bekijken) gecombineerd wordt met het slim wegstrepen van verzamelingen van oplossingen. Het is een techniek die vele toepassingen kent en het is het meestgebruikte algoritme-ontwerp-paradigma om optimale oplossingen te vinden voor grote problemen in de discrete optimalisatie die een eindige oplossingsruimte hebben. Voorbeelden hiervan zijn het vinden van optimale locaties voor 4G-masten of WiFi-hotspots in de binnenstad en het bepalen van optimale routes voor bijvoorbeeld vrachtschepen, vuilniswagens of fietskoeriers. In de uitleg hier gaan we telkens uit van problemen waarbij een minimum gevonden moet worden, maar dezelfde technieken zijn net zo eenvoudig toepasbaar op maximalisatieproblemen.
Uitgangspunt is dat oplossingen van een probleem op een bepaalde manier in een boomstructuur worden gezet, waarbij de wortel van de boom alle oplossingen

representeert en iedere vertakking een partitionering ervan weergeeft (vandaar het woord *branch*). Aan iedere tak wordt op een slimme manier een ondergrens toegekend (vandaar het woord *bound*), waarvan we met zekerheid weten dat geen enkele oplossing in die tak onder die ondergrens kan komen. Als de ondergrens van een tak hoger is dan de waarde van de tot dan toe beste oplossing, kan de hele tak geschrapt worden zonder dat een mogelijke optimale oplossing verloren gaat.
Om een beter beeld te krijgen van hoe dit werkt, geven we een voorbeeld dat met behulp van branch and bound opgelost kan worden. In dit voorbeeld moeten vier taken over vier personen verdeeld worden. Iedere persoon moet precies één taak uitvoeren en het is niet de bedoeling dat twee personen aan dezelfde taak gekoppeld worden. Vanwege een verschil aan ervaring, heeft iedere persoon een andere hoeveelheid tijd nodig voor iedere taak, zie tabel 1. Het is aan ons om de personen dusdanig aan de taken te koppelen dat de totale arbeidstijd minimaal is.

	taak A	taak B	taak C	taak D
persoon 1	9	2	7	2
persoon 2	6	4	3	7
persoon 3	5	8	1	9
persoon 4	7	6	9	4

tabel 1

Representatie en waardering van oplossingen

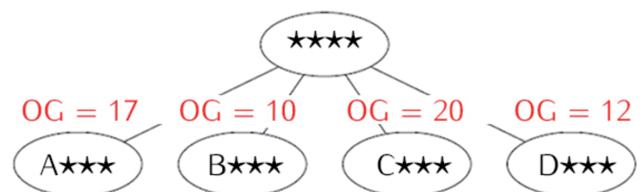
In dit geval is het eenvoudig om een concrete oplossing abstract weer te geven. Een mogelijke toekenning zou bijvoorbeeld kunnen zijn 'ABCD', waarmee bedoeld wordt dat de eerste persoon taak A doet, de tweede taak B, de derde taak C en de vierde taak D. De *oplossingswaarde* van deze oplossing ligt voor de hand: $9 + 4 + 1 + 4 = 18$. Enig puzzelen leert ons overigens al snel dat dat niet de optimale oplossing is.
Aangezien we bij branch and bound werken met verzamelingen van mogelijke oplossingen, en niet slechts met concrete oplossingen, willen we ook de situatie kunnen weergeven waarin een deel van de oplossing is vastgelegd. In dit geval ligt het voor de hand om te spreken over bijvoorbeeld 'AB∗∗', waarmee de verzameling van oplossingen bedoeld wordt waarin de eerste persoon aan taak A is toegekend, de tweede persoon aan taak B en de derde en vierde persoon nog niet aan een taak zijn toegekend. Vanzelfsprekend omvat deze verzameling dus de oplossingen ABCD en ABDC.

Ondergrenzen

De efficiëntie van branch and bound (ten opzichte van complete enumeratie) zit grotendeels in het feit dat volledige takken met oplossingen weggestreept kunnen worden als deze gegarandeerd allemaal slechter zijn dan de beste oplossing die we tot nu toe hebben gevonden. Hiertoe bepalen we een *ondergrens* voor alle oplossingen binnen die tak.
In ons voorbeeld is het mogelijk om aan het volledige probleem de ondergrens $2 + 3 + 1 + 4 = 10$ te geven, waarbij we iedere persoon de taak toebedelen die hem of haar de minste tijd kost. Dat twee personen daarbij allebei taak C doen en taak A niet aan de orde komt, negeren we voorlopig. Het moge in ieder geval duidelijk zijn dat geen enkele (geldige) toekenning een totale taakduur van minder dan 10 kan opleveren. Uiteraard is ieder getal onder de 10 ook een correcte ondergrens, maar het zal later blijken dat het voor het vervolg handig is als de ondergrens zo hoog mogelijk is.
Bij deelverzamelingen van mogelijke oplossingen kunnen we op een vergelijkbare manier de ondergrens bepalen. Neem bijvoorbeeld C∗∗A. In dit geval zijn de taken van persoon 1 en 4 al vastgelegd en zijn zij dus samen $7 + 7 = 14$ tijdseenheden bezig. Persoon 2 en 3 kunnen voor iedere oplossing in deze deelverzameling in ieder geval niet taak A of C meer doen, dus bij het bepalen van de ondergrens kunnen die mogelijkheden worden uitgesloten. We kiezen voor het bepalen van de ondergrens voor ieder van hen wederom de taak die het minste tijd kost (uit de resterende taken B en D). Voor persoon 2 is dat taak B (met 4 tijdseenheden) en voor persoon 3 is dat toevallig ook taak B (met 8 tijdseenheden). De ondergrens voor C∗∗A is dus $7 + 7 + 4 + 8 = 26$ tijdseenheden. Wederom is hopelijk duidelijk dat geen van de valide oplossingen omvat door C∗∗A in minder dan 26 tijdseenheden uitgevoerd kan worden.

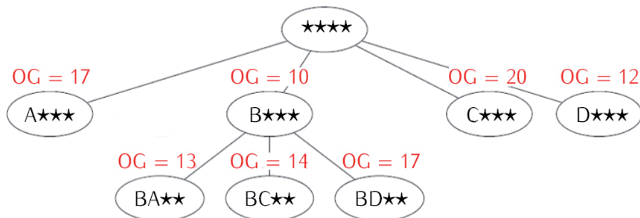
Zoekstrategie

Nu we weten hoe we vertakken, oplossingswaarden bepalen en ondergrenzen bepalen, kunnen we daadwerkelijk aan de slag. De overkoepelende verzameling aan oplossingen ∗∗∗∗ is nog niet zo spannend, dus we beginnen direct met de vertakking naar A∗∗∗, B∗∗∗, C∗∗∗ en D∗∗∗. Voor ieder van deze verzamelingen van oplossingen bepalen we de ondergrens, wat ons de waarden oplevert die weergegeven zijn in figuur 1.



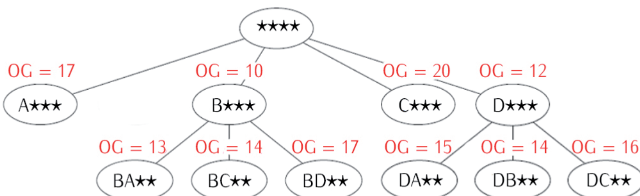
figuur 1

Het is belangrijk om nu te realiseren dat iedere ondergrens ook alleen maar dat is: een ondergrens. Het is dus helemaal niet zeker of er inderdaad een oplossing met waarde 10 bestaat. Vooralsnog ligt het voor de hand om het zoekproces te starten in de tak B∗∗∗, vanwege het feit dat deze tak de laagste ondergrens heeft. We vertakken wederom, nu tot BA∗∗, BC∗∗ en BD∗∗, en berekenen ook hier weer de ondergrenzen van, zie figuur 2.



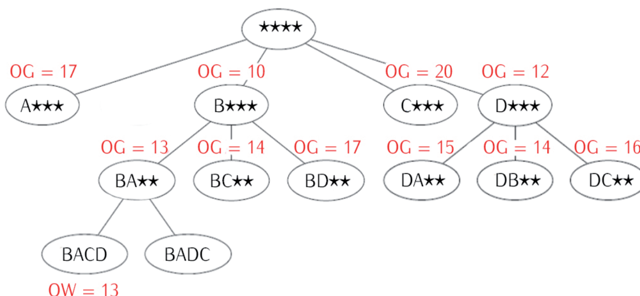
figuur 2

Nu is er iets interessants gebeurd. Hoewel we initieel een ondergrens van 10 hadden voor de tak B∗∗∗, blijkt nu we preciezer kijken dat geen van de oplossingen in deze tak onder de 13 kan zitten. We vervolgen onze zoektocht daarom met de tak D∗∗∗, aangezien daar wellicht nog een oplossing met waarde 12 te vinden is. Dit levert figuur 3 op.



figuur 3

Ook ditmaal zijn de ondergrenzen gestegen. Op basis daarvan kunnen we nu dan toch maar weer het best verder in de andere tak, bij BA∗∗, zie figuur 4.



figuur 4

Het blijkt dat de oplossing BACD een totale tijdsduur van 13 oplevert, wat overeenkomt met de ondergrens van BA∗∗. Dit is een prettige observatie. Immers, de ondergrenzen van alle andere nog niet compleet uitgevouwen takken zijn hoger dan 13, dus heeft het geen zin om daar verder te zoeken. Zelfs BADC hoeft niet doorgerekend te worden; gezien de ondergrens van BA∗∗ zou dit namelijk in het beste scenario in een oplossingswaarde gelijk aan die van BACD kunnen resulteren. Het probleem is dus opgelost: BACD is een optimale oplossing van dit probleem. Toevallig zijn we nu dus direct klaar na het bepalen van de oplossingswaarde van de eerste concrete oplossing die we tegenkomen. Dat is niet altijd het geval; als BACD en BADC een oplossingswaarde groter dan 14 zouden hebben gehad, dan hadden we de zoektocht voortgezet bij BC∗∗ of DB∗∗.
Terugkijkend hebben we tien keer een ondergrens bepaald en slechts eenmaal de waarde van een concrete oplossing berekend. De taken kunnen op 4! verschillende manieren aan de personen worden toegekend, wat resulteert in 24 mogelijke oplossingen. Door het toepassen van branch and bound hebben we (ten opzichte van complete enumeratie) dus best wat tijd bespaard. Je kunt je voorstellen dat er bij grotere problemen nog veel meer winst te behalen valt. In deze toepassing kost het bepalen van een ondergrens net iets meer moeite dan het berekenen van een oplossingswaarde. In het algemeen hoeft dat bij branch and bound niet het geval te zijn. Bovendien, als de reductie van het aantal benodigde berekeningen maar groot genoeg is, dan verdienen we de extra moeite voor het bepalen van ondergrenzen ruimschoots terug.

Werkmiddag

Tijdens de werkmiddag wordt er gewerkt, met behulp van branch and bound, aan algoritmisch denken en de daarmee samenhangende concepten zoals computationele complexiteit en heuristisch redeneren. Hoewel toewijzingsproblemen, zoals hierboven gebruikt om branch and bound toe te lichten, een mooie toepassing zijn, hebben we er voor de werkmiddag voor gekozen om eerst te werken aan planningsproblemen (*scheduling*). Ook dit is een veelvoorkomende toepassing, waarbij geen al te lastige wiskundige voorkennis vereist is. Het bevat bovendien genoeg interessante aspecten om leerlingen goed aan het denken te krijgen. Een bijkomend voordeel hiervan was dat leerlingen later zelf de ondergrensbepaling bij toewijzingsproblemen konden uitzoeken, aangezien dat eenvoudiger is dan bij scheduling en de leerlingen ondertussen al wat ervaring met de concepten hadden opgedaan. De doelgroep was vwo 5 – wiskunde B (ongeveer vijftig leerlingen), de opdracht besloeg drie klokuren. Verder was het uitgangspunt dat leerlingen in groepjes zelf met de stof aan de slag zouden gaan.
De twee docenten zouden wel rondlopen om te helpen, maar er werd in principe geen klassikale uitleg gegeven.
De leerdoelen van de werkmiddag waren als volgt:

- De leerling heeft een intuïtief begrip van computationele complexiteit en kan op basis daarvan het nut van het algoritme-ontwerp-paradigma branch and bound uitleggen;
- De leerling kan omschrijven wat een heuristiek is;
- De leerling kan met behulp van branch and bound op systematische wijze de optimale oplossing van een voorbeeldprobleem vinden.

Een beschrijving van de opdracht is te vinden op de website van *Euclides*.

Ervaringen in de klas

De werkmiddag is zeer positief ontvangen door de leerlingen. Het was wel hard doorwerken – de meesten hebben op het eind nog behoorlijk moeten haasten om het allemaal af te krijgen binnen drie klokuren. Een advies is daarom ook om niet drie, maar vier klokuren hiervoor in te ruimen. Uit de uiteindelijke verslagen van de leerlingen bleek bovendien dat een paar aspecten nog niet door iedereen helemaal goed begrepen waren, met name de beperking van heuristieken en de manier om te bepalen of een gevonden oplossingswaarde optimaal is. Hiertoe is de opdracht reeds aangepast, om die aspecten voor komende uitvoeringen duidelijker te maken. Leerlingen noemden de opdracht 'uitdagend', 'anders dan de standaardlessen' en 'interessant' in interviews na afloop van de werkmiddag, en gaven bovendien aan het leuk te vinden om op deze manier te puzzelen en zich te verdiepen in een onbekend onderwerp. Recentelijk is de werkmiddag voor een tweede keer uitgevoerd, nu in vier uur en met meer inleidende opgaven en een duidelijkere uitleg van de concepten.
De aangebrachte verbeteringen (zoals het inleiden van planningsproblemen via een praktische bedrijfskundige context) zijn reeds in de beschrijving verwerkt. De middag verliep soepel, leerlingen hadden minder vragen en de kernconcepten bleken beter aan te komen. We zijn tevreden over de huidige vorm van de werkmiddag en zien er nu al naar uit om nog meer leerlingen uit te dagen met branch and bound.

Conclusie

Computational thinking is 'hot', en het lijkt ons goed om dit onderwerp niet alleen bij informatica te laten liggen maar ook bij wiskunde op te pakken. Het voor leerlingen onbekende paradigma branch and bound lijkt goed te werken als basis voor een grotere opdracht waarin leerlingen moeten nadenken over complexiteit, (mogelijke onnauwkeurigheid van) heuristieken en een algoritmische aanpak van problemen. Mocht je ook graag aan de slag willen met dit onderwerp, stuur dan een mailtje naar de auteurs om het materiaal (inclusief docentenhandleiding) op te vragen.
Voor de opdracht zie:


vakbladeuclides.nl/943timmer

Noten

[1] Wing, J. M. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM*, *49*(3), 33-35.
[2] *http://www.wiskundebrief.nl/782.htm#3*

Over de auteurs

Mark Timmer is docent wiskunde aan het Twents Carmel College te Oldenzaal en vakdidacticus aan de Universiteit Twente. Joris van der Meulen heeft afgelopen jaar de eerstegraadsopleiding tot wiskundedocent aan de Universiteit Twente afgerond en geeft momenteel les in Zwitserland. E-mailadressen: *m.timmer@utwente.nl* en *j.vandermeulen-4@alumnus.utwente.nl*.

KWG WINTERSYMPOSIUM 2019
IS STATISTIEK WEL BETROUWBAAR?

Zaterdag, 12 januari 2019, Academiegebouw van de Universiteit Utrecht (Domplein) Tijd: 10.30 – 16.00 uur

Op zaterdag 12 januari 2019 is het jaarlijkse wintersymposium van het Koninklijk Wiskundig Genootschap KWG. Dit jaar over de betrouwbaarheid van statistiek. De keuze van dit onderwerp komt voort uit de vele berichten in de media over de betrouwbaarheid van resultaten van wetenschappelijk onderzoek. Vier wetenschappers belichten dit thema:

- prof. Ronald Meester (VU): Waarom het significantieniveau geen maat voor bewijskracht is
- prof. Peter Grunwald (CWI, Universiteit Leiden): Safe Statistics
- prof. Casper Albers (RUG): Statistische zonden. Een overzicht van twijfelachtige onderzoekspraktijken (en hoe deze te herkennen)
- prof. Klaas Slooten (VU): De bewijswaarde van matches in DNA-databanken

Het symposium is in de eerste plaats bestemd voor docenten wiskunde, maar ook voor leerlingen en collega's van andere vakgebieden kan het symposium interessant zijn. Alle belangstellenden zijn van harte welkom.

Inschrijving

Het volledige programma is te vinden op de website *wintersymposium.weebly.com*. Op deze website vind je ook het digitale inschrijfformulier.
De kosten voor deelname aan het symposium bedragen voor KWG-leden € 30, voor niet-leden € 35 en voor leerlingen, studenten en standhouders € 15. De bijdrage is inclusief lunch en consumpties gedurende de dag.
Bij betaling na 31 december 2018 worden de deelnamekosten met € 5 verhoogd. Nadere inlichtingen: Theo van den Bogaart, theo.vandenbogaart@hu.nl, tel. (06)23375306.

EUCLIDES-PUZZEL IN DE KLAS

Ruud Stolwijk

Ruud Stolwijk is een naam die je vaak ziet staan in de ladderstand van de puzzelrubriek van *Euclides*. Ruud lost niet alleen puzzels op, maar maakt daar ook onderwijs van! .

Al heel wat jaren neem ik met veel plezier deel aan de puzzelrubriek van *Euclides*. En zo af en toe vertel ik daar op mijn school, de Vrijeschool Zutphen VO, wel eens iets over in mijn wiskunde D klassen, met name als deelname aan de Kangoeroe wedstrijd of de Olympiade aan de orde is, en ik wil toelichten hoe leuk het kan zijn om aan dit soort zaken mee te doen. En dat je er 'wiskundig creatief' van wordt, iets waar je natuurlijk ook bij de gewone lesstof best je voordeel mee kunt doen. Naast plezier geven puzzels ook vaak een (bescheiden) idee van hoe het is om (een beetje) wiskundig onderzoek te doen, en dat is een aspect van wiskunde dat in de 'gewone' lessen niet zo veel aan de orde komt - maar in (praktische) opdrachten des te meer! In dit artikel vertel ik over een opdracht die ik heb gebaseerd op *Euclides*-puzzel 89-6 uit mei 2014. Deze opdracht heb ik inmiddels een paar keer in mijn wiskunde D klas (5 vwo) uitgetest en aangepast, zodat ik de huidige versie ook wel aan anderen durf aan te bieden.

Introductie

De oorspronkelijke puzzel had als titel 'Web-driehoeken'. [1] De introductie van de puzzel was aan de hand van webgrafieken, maar ik heb ervoor gekozen om de introductie iets te wijzigen door simpelweg te definiëren dat (a, b, c) een driehoek vastlegt met als hoekpunten (a, b), (b, c) en (c, a). In de klas (wiskunde D klas 11, overeenkomend met 5 vwo) gaf dit geen problemen. De introductie van de opdracht was dan ook bijzonder kort: één enkel voorbeeld op het bord, en vervolgens werd de opdracht uitgedeeld aan de (door de leerlingen zelf samengestelde) tweetallen. Een opdracht buiten de reguliere stof om laat ik altijd in twee- of drietallen doen, omdat de leerlingen dan vanzelf worden gedwongen tot samenwerking en overleg. De leerlingen kregen drie lessen de tijd. Daarnaast, zo werd achteraf duidelijk, hebben de leerlingen behoorlijk veel tijd in de opdracht gestoken - in ieder geval heel wat meer dan ze meestal aan de gewone opgaven uit het boek besteden...

De opdracht zelf

Voor de duidelijkheid nu eerst de opdracht zoals de leerlingen deze ontvingen:

Opdracht (a,b,c)-driehoeken* wiskunde D* klas 11* versie 2018

Vooraf: met 'toon aan' wordt bedoeld: netjes laten zien met behulp van exacte berekeningen.
Verder geldt bij elke vraag dat volstrekt duidelijk moet zijn hoe je aan je antwoord komt. Berekeningen en tekeningen kunnen daarbij uiteraard een rol spelen.

We definiëren (a, b, c) als zijnde de driehoek met hoekpunten (a, b), (b, c) en (c, a). Dus (1, 2, 3) is de driehoek met hoekpunten (1, 2), (2, 3) en (3, 1).
Eerst drie instapopdrachten:

(1) Teken (1, 2, 3) en toon aan dat dit een gelijkbenige driehoek is.
(2) Teken (0, -2, -2) en toon aan dat dit een rechthoekige gelijkbenige driehoek is.
(3) Bereken de hoeken van (0, 1, 5).

Bij de volgende (iets uitdagendere) vragen kan een tekening helpen, zowel bij het oplossen als bij het controleren van je antwoord.
(0, 1, d) is gelijkvormig met (2, 4, 9). Hierbij is d een reëel getal.

(4) Bereken alle mogelijke waarden van d.
Tip: realiseer je dat om te beginnen (2, 4, 9) in feite identiek is aan (0, 2, 7) ...

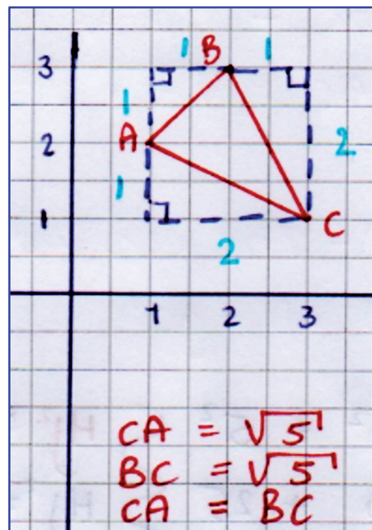
(5) Voor welke waarde(n) van d is (0, 1, d) een rechthoekige driehoek?
(6) Voor welke waarde(n) van d is (0, 1, d) een gelijkbenige, niet-rechthoekige driehoek?

Ten slotte bekijk je de hoeken van (0, 1, d). De hoeken van een dergelijke driehoek kunnen niet zomaar elke waarde aannemen.

(7) Onderzoek wat de grootte van de hoeken van (0, 1, d) kan zijn. Hierbij zijn tekeningen waarschijnlijk wel noodzakelijk, al is het maar om een idee te krijgen. Eventueel kan GeoGebra hierbij nuttig zijn.

Leerlingen aan de slag

In totaal negen tweetallen gingen met de opdracht aan de slag. De eerste drie opdrachten bleken inderdaad instapopdrachten: de leerlingen kwamen daar vlot uit, en dat motiveerde zeker om verder te gaan. Zie figuur 1 waarin een deel van de uitwerking van opdracht 1 van Hesse en Anne te zien is. Bij opdracht 4 bleek het nodig om klassikaal even een kleine toelichting te geven.



figuur 1 Uitwerking van opdracht 1 door Hesse en Anne

Niet alle tweetallen hadden in de gaten dat je door verschuiven elke driehoek met een hoekpunt op één van de coördinaatassen kunt krijgen (vandaar de toegevoegde tip bij deze opdracht). Dat je vervolgens driehoeken kunt verkleinen en zo ook een tweede hoekpunt op de andere coördinaat-as kunt krijgen heb ik aan de leerlingen zelf overgelaten - en dat lukte vrijwel alle tweetallen ook. Verder zijn er door mij eigenlijk geen tips gegeven. Wel kwamen er regelmatig vragen, vooral over 'wat ze op moesten schrijven als uitleg'. Voor degene die goed hadden opgelet, kwam tussendoor ook aan de orde dat (2, 4, 9) ook anders geschreven kan worden, bijvoorbeeld als (9, 2, 4)... maar dat pikten de leerlingen niet op.
Een voorbeeld van een uitwerking (Adeline en Iris) van opdracht 4 begint als volgt:

Uitwerking opdracht 4 door Adeline en Iris

Driehoek (2, 4, 9) heeft de hoeken met de coördinaten: $A(2, 4)$, $B(9, 2)$ en $C(4, 9)$. De lengte van $MC = 2$ want het is de verschil in afstand op de x-as dus $4 - 2 = 2$. De lengte $AM = 5$ want het is het verschil in afstand op de y-as dus $9 - 4 = 5$. Zo kan ik alle zijden van de hulpdriehoeken berekenen en daarna de zijdes.
Zijde $AB = \sqrt{(2^2 + 7^2)} = \sqrt{(53)}$
Zijde $AC = \sqrt{(5^2 + 2^2)} = \sqrt{(29)}$
Zijde $BC = \sqrt{(7^2 + 5^2)} = \sqrt{(74)}$

Zo kan ik ook de zijden van driehoek $(0, 1, d)$ berekenen. Driehoek $(0, 1, d)$ heeft de hoeken met de coördinaten: $D(0, 1)$, $E(1, d)$ en $F(d, 0)$. De zijden van Driehoek DEF zijn:
Zijde $DE = \sqrt{((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2)} = \sqrt{((0 - 1)^2 + (1 - d)^2)} = \sqrt{(1 + d^2 - 2d + 1)} = \sqrt{(d^2 - 2d + 2)}$
Zijde $EF = \sqrt{((1 - d)^2 + (0 - d)^2)} = \sqrt{(d^2 - 2d + 1 + d^2)} = \sqrt{(2d^2 - 2d + 1)}$
Zijde $DF = \sqrt{((0 - d)^2 + (1 - 0)^2)} = \sqrt{(d^2 + 1)}$

We weten dat de driehoeken gelijkvormig zijn. Dat betekent dat ze dezelfde hoeken hebben, maar we weten niet welke hoeken hetzelfde zijn. Dus zijn er zes mogelijkheden:

AB	AC	BC
DE	EF	DF

AB	AC	BC
DE	DF	EF

AB	AC	BC
DF	DE	EF

AB	AC	BC
DF	EF	DE

AB	AC	BC
EF	DF	DE

AB	AC	BC
EF	DE	DF

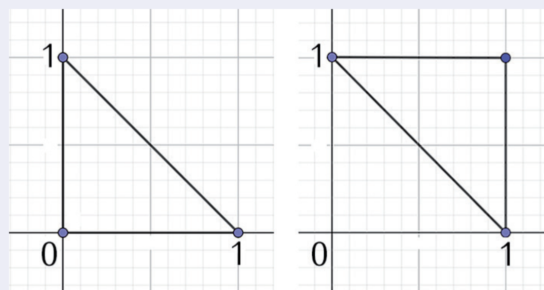
Dus
$AB : DE = AC : EF$
$\sqrt{(53)} : \sqrt{(d^2 - 2d + 2)} = \sqrt{(29)} : \sqrt{(2d^2 - 2d + 1)}$
$\sqrt{(53)} \times \sqrt{(2d^2 - 2d + 1)} = \sqrt{(29)} \times \sqrt{(d^2 - 2d + 2)}$
$\sqrt{(53(2d^2 - 2d + 1))} = \sqrt{(29(d^2 - 2d + 2))}$
$53(2d^2 - 2d + 1) = 29(d^2 - 2d + 2)$
$106d^2 - 106d + 53 = 29d^2 - 58d + 58$
$77d^2 - 48d - 5 = 0$
$D = (-48)^2 - 4 \times 77 \times -5 = 2304 + 1540 = 3844$
$d = (48 - \sqrt{(3844)}) : (2 \times 77)$ V
$d = (48 + \sqrt{(3844)}) : (2 \times 77)$
$d = (48 - 62) : 154$ V $d = (48 + 62) : 154$
$d = - 14 : 154$ V $d = 110 : 154$
$d = - 0{,}09090...$ V $d = 0{,}714...$

En vervolgens werd geconstateerd (en in dit geval ook toegelicht) dat alleen de tweede waarde van d voldeed. Bij de uitwerking van de andere mogelijkheden bleek overigens dat controle van de gevonden d-waarden steeds nodig was om te weten te komen of deze voldeed. Voor mij is van belang dat leerlingen ervaren dat algebra kan worden ingezet om een meetkundig probleem op te lossen, en daarmee krijgt die algebra in mijn ogen meer waarde. Overigens was ik wel verrast dat leerlingen het op deze manier aanpakten; door de tip te volgen dat (2, 4, 9) in feite identiek is aan (0, 2, 7) en dan te verkleinen tot $(0, 1, \frac{2}{7})$ gaat het zonder algebra, en als je dan ook nog doorhebt dat (2, 4, 9) geschreven kan worden als (9, 2, 4), dan kom

je met de tip en verkleinen snel (zonder algebra) tot de waarde $\frac{5}{7}$ voor *d*. Maar goed, dat leerlingen uitwerkingen zoals hierboven aandurven en netjes uitvoeren is in mijn ogen prima en prachtig.

Opdracht 5 gaf voor de leerlingen niet veel problemen. Hieronder een voorbeeld (Marienke en Naomi) van een uitwerking die eigenlijk 'in zijn achteruit' wordt gegeven:

Uitwerking opdracht 5 door Marienke en Naomi

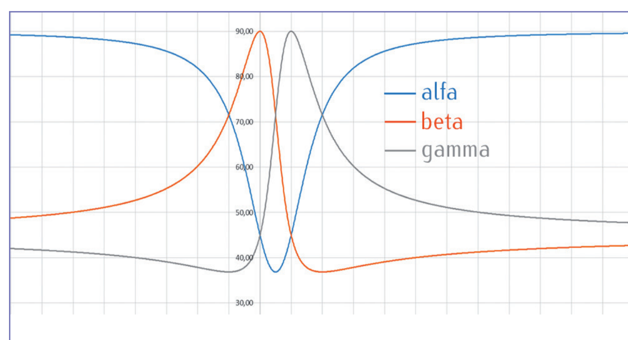


figuur 2

Voor *d* is 0 en *d* is 1 is (0, 1, *d*) rechthoekig, daaruit komen de driehoeken (0, 1, 0) en (0, 1, 1). We hebben dit gedaan door te proberen en in gedachte te houden dat er een punt moest liggen op de verticale lijn waar *x* 1 is (vanwege het punt (*d*, 0), daar is *y* 0, dus is het op de *x*-as). Door de twee punten die nog niet helemaal vastlagen te verschuiven kwamen we daarmee op de *d*-waarden 0 en 1. We hebben ook gekeken of *d* in het geval van een rechthoekige driehoek negatief kon zijn, maar zodra we dat deden, en een rechthoekige driehoek hadden, was de waarde van *d* voor het ene punt anders dan voor het andere en dat kan natuurlijk niet. Deze twee uitkomsten van *d* vormen een rechthoekige driehoek omdat het standaard gelijkbenige, rechthoekige driehoeken zijn, namelijk de driehoek 1, 1, $\sqrt{2}$. (De stelling van Pythagoras geeft:

$1^2 + 1^2 = ?^2$
$1 + 1 = ?^2$
$2 = ?^2$
$? = \sqrt{2}$, hier dus bij beide de schuine zijde)

Er waren ook wel leerlingen die de lengtes van de zijden van (0, 1, *d*) in formulevorm gaven en dan 'aan de algebra' gingen – met meestal goed gevolg. En voor die leerlingen was deze laatste aanpak natuurlijk ook bij opdracht 6 prima geschikt.
En soms bedenken ze zelfs dingen die ik in ieder geval op het eerste gezicht niet begrijp... zo zag ik bij Elske en Josefien de grafieken van figuur 3.



figuur 3 Uitwerking van opdracht 6 door Elske en Josefien

Helaas ontbrak de toelichting, maar soms is het nu eenmaal verstandig om gewoon na te vragen hoe leerlingen tot iets gekomen zijn... Wat bleek? Door (in Excel) 'heel veel verschillende waarden voor *d*' te nemen, met stapgrootte 0,01, was dit tweetal via de cosinusregel gekomen tot de bijbehorende waarden van de drie hoeken. En dat levert dan bovenstaande grafieken. En als je dan gebruik maakt van het feit dat een gelijkbenige driehoek twee gelijke hoeken heeft, kun je uit de snijpunten van de grafieken de oplossing van opdracht 6 vinden. En ook opdracht 7 is dan prima te doen.

Het kan ook anders... Thor en Sybo kwamen tot het volgende, waarbij het wel jammer is dat ze hun conclusie dat $d = 0{,}5$ de grenswaarde oplevert, niet nader kunnen toelichten, zie figuur 4.

opdracht 7
7 Hij Nadert altijd de Rechte driehoek (90°, 45, 45)
in de oneindigheid. of bij de negatieve oneindigheid
maar haalt dit nooit.
de 90° is alleen mogelijk als d 1 of 0 is
dus dit is de max
de kleinste Hoek is 36,94° en dit is bij een
gelijkbenige driehoek.
dit punt vind Je bij d = 0,5

figuur 4 Uitwerking van opdracht 7, door Thor en Sybo

Conclusie en beoordeling

Mijn conclusie is dat deze opdracht de leerlingen de gelegenheid geeft om 'verschillende soorten geleerde wiskunde' in te zetten, en dat hebben ze over het algemeen ook gedaan. Overigens zou deze opdracht, gezien het onderwerp en de benodigde wiskunde, ook prima te gebruiken zijn bij wiskunde B. In de nabespreking bleek dat de leerlingen dit soort opdrachten ('niet uit het boek en in tweetallen') ook leuk vinden om te doen, maar dan liever niet al te vaak, omdat het ze

wel veel meer tijd kost dan de 'gewone opgaven uit het boek'. En wat de beoordeling betreft… om te beginnen heb ik (uiteraard) de opdracht zelf uitgewerkt en vervolgens een keuze gemaakt om de opdrachten achtereenvolgens te beoordelen met 3, 3, 6, 6, 4, 6 en 8 (dus in totaal 36) punten. Dus 12 voor de instap, 16 voor het vervolg en 8 voor het afsluitende onderzoekje. Dit leverde scores op van 17 tot 30 punten op, die ik vervolgens heb omgezet naar een cijfer 'op halven afgerond'. En daar waren zowel de leerlingen als ikzelf tevreden mee.

Noot

[1] Rooij, L. de & Doyer, W. (2015) Web-driehoeken. *Euclides*, (*89*)6, p. 47.

Over de auteur

Ruud Stolwijk is docent wiskunde op de Vrijeschool Zutphen VO en voorzitter van de Alympiade-commissie.
Email-adres: *rstolwijk@vszutphen.nl*

CREATIEF MET RUIMTE

Serge van Meer

Serge van Meer ontwierp een creatieve les en beschrijft in dit artikel welke leeropbrengsten hij bij zijn leerlingen zag.

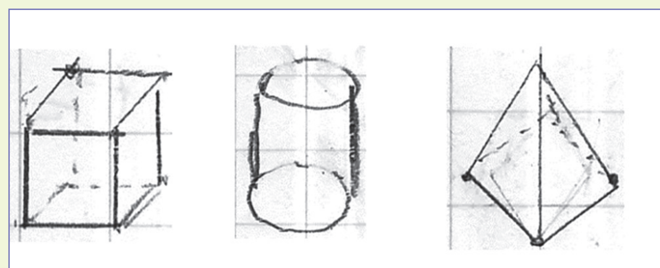
Opstarten

Het is vrijdag half negen, het eerste uur start. De twaalf vwo-brugklasleerlingen van klas S1 zijn een beetje moe, een verschijnsel dat vaak optreedt aan het einde van de periode. De donkere dagen helpen eraan mee. Ook veel collega-docenten beginnen te verlangen naar de vakantie. Ik heb twee lesuren in een blok. Vandaag gaan leerlingen ruimtefiguren bouwen van papier. De ruimtefiguren worden versierd in het teken van kerstmis. De opdracht is kort. Ze gebruiken A4-vellen uit de kopieermachine, een schaar, papierlijm, eventueel plakband, een passer en een geodriehoek of meetlat. Ze werken in duo's, en ik heb de groepjes ingedeeld naar eigen inzicht, zonder rekening te houden met wie ze willen samenwerken. De leerlingen worden netjes verdeeld over het lokaal zodat er redelijk wat ruimte is tussen de duo's. Het is een luxe om met een kleine groep te werken. Ik gaf ze deze opdracht:

Opdracht ruimtefiguren

Maak samen:
Een kubus met zijde 8,0 cm
Een cilinder met diameter 8,0 cm en hoogte 10,0 cm
Een piramide met een vierkant met zijde 8,0 cm als grondvlak en een hoogte 10,0 cm van elk driehoek-vlak.

Ik zal de ruimtefiguren waarderen op constructie (stevigheid) en schoonheid.



figuur 1 Kubus, cilinder en piramide

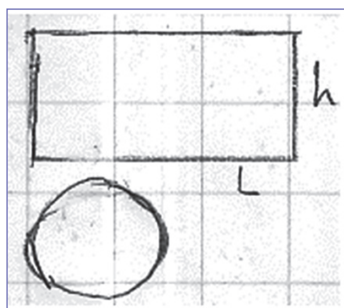
De eerste stappen

De meeste leerlingen gaan goed aan de slag. Ze knutselen graag en vinden dit veel leuker dan een standaardles wiskunde. Sommige leerlingen treuzelen en ik spoor ze aan om te starten. Veel leerlingen starten met het tekenen van vierkanten voor de kubus. Het verbinden van de vierkanten levert veel problemen op en sommigen gebruiken uitgebreid het plakband. Het resultaat is weinig stevig. Een aantal leerlingen komt erachter dat versieren bijna niet meer gaat op een slappe ruimtelijke vorm.
De raderen gaan draaien… Ongeveer driekwart van de leerlingen begint opnieuw. De vierkanten worden opnieuw getekend en nu meteen versierd. Ze starten met vooruit te denken. Het doet me plezier, dit is ontdekkend leren. Een kwart van de duo's maakt zes aanliggende vierkanten in de vorm van een kruis, ik heb een sterk vermoeden dat ze dit van vroeger kennen. Een tweede kwart maakt vierkanten met een extra randje eraan, soms met kartelpatroon, voor het verlijmen van de vierkanten. Meisjes zijn hier gemiddeld beter in. Ik heb de ervaring dat zij vaak beter kunnen knutselen. Het resultaat mag er zijn. De nieuwe kubussen zijn redelijk stevig en hebben een betere kubusvorm. Deze leerlingen hebben een flinke stap gezet in 'constructiedenken'. Het is ook een voorbeeld van constructivisme, zoals Piaget het bedoelde. Een geavanceerdere strategie van bouwen ontstaat omdat de wereld beter begrepen wordt. Ik ben trots op deze leerlingen.
De leerlingen die nog niet zo ver zijn prikkel ik met de vraag 'hoe zou je de kubussen steviger kunnen maken?' Ongeveer de helft begint nu te denken, de andere helft vindt het niet nodig en gaat verder op de oude weg.
De leerlingen zijn goed bezig en hebben niet eens door dat ik een paar minuten het lokaal verlaat om wat extra papier te halen. Er is focus, en veel meer dan in een standaardles waarbij er weinig nodig is om ze af te leiden.

Pauze en weer verder

Na het eerste lesuur krijgen ze een pauze van vijf minuten. Eén derde van de klas maakt er géén gebruik van. Ze gaan verder met het knutselen. Dit is motivatie. Wat een verschil met een standaardlesblok, waarbij leerlingen verlangen naar een pauze.
Een drietal duo's start met de cilinder. Sommigen maken een cirkel waarbij ze de passer instellen op de diameter. Alhoewel ze hebben geleerd dat het om de straal gaat, wordt dat nog regelmatig vergeten. Ik hoef slechts een korte opmerking te maken 'diameter of straal' en ze weten het weer. De passer wordt opnieuw ingesteld.
Leerlingen lopen nu vast, behalve één duo dat via uitproberen – trial and error – verdergaat. De hoogte (10,0 cm) is gegeven, maar niet de lengte van het rechthoekvlak.

Ik hoor 'Nu kunnen we niet verder…'. Ik vraag hen om erover na te denken. Ze lijken het niet te waarderen. Denken vraagt een inspanning en mensen – in het algemeen – zijn liever lui dan moe. Eén leerling tekent een rechthoek waarvan de hoogte in de richting ligt van de hoogte van het A4-blad. Ze heeft nog niet door dat de lengte van de rechthoek veel langer is, want die volgt de omtrek van de cirkel-grondvlak.
Ik leg haar uit dat de hoogte van de cilinder past op de korte zijde van de A4, en dat ze dan meer lengte over heeft op haar A4 voor de lengte van de rechthoek. Dit is voor mij een heel leerzaam moment. Deze leerling – en zij is niet de enige – bekijkt de cilinder puur als een 2D-object, en dan is de hoogte van het rechthoekvlak langer. Ik associeer het met het experiment van Piaget bij jongere kinderen: 'Als je limonade overgiet van een smal in een breed glas, menen de meeste kleuters dat ze minder hebben.' Omdat de stand van de limonade in het glas lager is (hoogte). Ze betrekken de doorsnede van het glas nog niet… Even later krijgt dit duo door dat de lengte van het rechthoekvlak heel erg lang is, want hij krult volledig om het cirkel-grondvlak. De lengte is ongeveer 24,4 cm, en dus veel groter dan de hoogte van 10,0 cm. Deze leerlingen hebben een flinke stap gezet in '3D-denken', en dat is een mijlpaal. Ook dit is een prachtig voorbeeld van constructivisme. De stap dat je deze lengte kunt berekenen via de omtrek vindt niemand. Leerlingen gaan pragmatisch te werk. We leggen een rechthoek om de cirkel heen, zetten een streepje op de goede lengte, en knippen hem. Dat werkt heel goed.



figuur 2 De lengte is veel groter dan de hoogte…

Slechts twee duo's lukt het ook nog de piramide te construeren en te versieren binnen het tweede lesuur.
Ik waarschuw de helft van de leerlingen dat het tweede lesuur voorbij is anders waren ze doorgegaan. Is dat niet de wens van elke docent …. Ging alles goed? Nee, de werkelijkheid is altijd weerbarstiger dan de theorie. Eén leerling heeft zijn kubus vermorzelt, en de cilinder heeft hij niet afgemaakt. De versiering op de kubus, waaraan hij veel tijd heeft besteed, is echter wel mooi. Zijn duo-maatje is op eigen kracht verder gegaan en heeft meer bereikt. Ik vraag waarom hij zijn kubus kapot heeft gemaakt waarop hij antwoordt dat het per ongeluk is gegaan. Gezien de zware schade is dat zeer twijfelachtig, en dat geef ik hem terug. De volgende keer zal ik hem extra in de gaten houden, en ik weet ook dat hij thuis in een moeilijke situatie zit. Ook dit is onderwijs.

Conclusies

Deze ervaring stimuleert me om vaker naar creatieve werkvormen te grijpen. Als leerlingen constructivistisch leren, blijft de kennis veel beter hangen. Hun hersenen zijn er intensief mee bezig geweest, nieuwe dwarsverbanden zijn gelegd. Ook belangrijk is dat leerlingen gemotiveerd raken omdat ze het leuk vinden. De drijfveren van motivatie 'competentie, zelfstandigheid, samenwerken'[1] worden gevolgd. Bij nieuwe klassen vraag ik altijd naar wat zij leuke en niet-leuke vakken vinden. Opvallend is dat wiskunde heel slecht scoort, meestal vindt 90% van de klas het een vervelend vak. Het is wel één van de belangrijkste vakken in ons onderwijs. Gevaar is dat een negatieve spiraal ontstaat: 'Als je het niet leuk vindt, ga je minder je best doen, waardoor je nog slechter wordt, en het nog vervelender gaat vinden.' Mijn stelling is 'zorg dat leerlingen het vak leuk vinden, anders raak je ze kwijt' waaruit volgt 'als ze het leuk vinden, komt het meestal wel goed'. Natuurlijk blijft het probleem dat als leerlingen zwak zijn in een vak door aanleg, het praktisch onmogelijk is om het leuk te maken. De pijler 'competentie' ontbreekt. Leerlingen die door aanleg slecht kunnen rekenen, zullen bijna altijd de vakken wiskunde, natuurkunde, scheikunde en economie verfoeien. Maar de meeste leerlingen kunnen wel rekenen…
En natuurlijk, de gemaakte ruimtefiguren worden opgehangen op het grote bord in de hal van de school.

> 'ZORG DAT LEERLINGEN HET VAK LEUK VINDEN, ANDERS RAAK JE ZE KWIJT.'

Noot

[1] Ryan, R.M., & Deci, E.L. (2000). Self-determination theory and the facilitation of intrinsic motivation, social development, and well-being. *American Psychologist,* 55(1), 68-78.

Over de auteur

Serge van Meer geeft wiskunde, scheikunde, natuurkunde en natuurwetenschappen op de Europese School in Den Haag. Hij is eerstegraads docent scheikunde en werkt sinds een paar jaar in het voortgezet onderwijs nadat hij twintig jaar bij de TU Delft heeft gewerkt.
E-mailadres: *s.c.h.vanmeer@xs4all.nl*

EEN KONINKLIJK BORDSPEL IN TRANSSYLVANIË

Nils van de Berg

De 59e Internationale Wiskunde Olympiade (IMO) keerde afgelopen zomer terug naar het land waar de eerste IMO werd gehouden: Roemenië. In Cluj-Napoca, de hoofdstad van de historische regio Transsylvanië, mochten de leerlingen zich aan zes opgaven wagen. In dit artikel bespreekt deelnemer Nils van de Berg zijn oplossing van opgave 4.



Het Nederlandse team is het afgelopen jaar geselecteerd aan de hand van allerlei verschillende toetsen. Vorig jaar ben ik ook mee geweest naar de IMO en door mijn leuke tijd toen was ik des te gemotiveerder om dit jaar weer mee te gaan. Bij elke selectietoets was het weer even peentjes zweten, maar na de laatste toets stond ik nog overeind en mocht ik met zes andere leerlingen naar Roemenië. Aan de andere kant van Europa hebben we eerst een week hard met elkaar getraind voordat we de deelnemers van meer dan honderd andere landen ontmoetten. De eerste opgave van dag twee was deze opgave waarin de oud-staatshoofden van België en Nederland een rol speelden.

Opgave 4

Een *plek* is een punt (x, y) in het vlak zodat x en y beide gehele getallen zijn met $1 \leq x, y \leq 20$. Bij aanvang zijn alle 400 plekken leeg. Albert en Beatrix plaatsen om de beurt een steen, waarbij Albert begint. Als Albert aan de beurt is, plaatst hij een nieuwe rode steen op een lege plek, zodanig dat de afstand tussen elke twee plekken met een rode steen niet gelijk is aan $\sqrt{5}$. Als Beatrix aan de beurt is, plaatst zij een nieuwe blauwe steen op een lege plek. (Een plek met een blauwe steen mag op willekeurige afstand van een andere niet-lege plek liggen.) Ze stoppen zodra een speler geen steen meer kan plaatsen. Bepaal de grootste K zodanig dat Albert gegarandeerd minstens K rode stenen kan plaatsen, hoe Beatrix haar blauwe stenen ook plaatst.

Paardensprong

Bij zo'n opgave is het van belang om eerst te begrijpen wat er precies staat. Wat betekent het dat de afstand niet $\sqrt{5}$ mag zijn en dat er plekken zijn met x en y tussen 1 en 20? Eigenlijk is het makkelijker deze plekken in gedachten te vervangen door een vierkant bord dat bestaat uit 20×20 vakjes. Nu moeten we nog kijken wat de afstand van $\sqrt{5}$ betekent. Twee vakjes liggen $\sqrt{5}$ van elkaar af, als ze precies een paardensprong (een verplaatsing van twee horizontale vakjes en een verticaal vakje, of twee verticale vakjes en een horizontaal vakje) van elkaar verwijderd zijn. Nu we de opgave voor ons begrijpelijker verwoord hebben, kunnen we de opgave proberen te kraken.

Begin met kleine gevallen

Een van de belangrijkste lessen die we leren gedurende de trainingsbijeenkomsten is dat je elke opgave begint door kleine gevallen te doen. Je vult dus kleine getallen in of doet iets anders waardoor de opgave concreter of makkelijker wordt. In deze opgave lijkt dat in eerste instantie moeilijk omdat er geen variabele is, maar het getal 20 kan best door een kleiner getal vervangen worden. Het eerste wat ik dus deed, was de 20 in de opgave vervangen door een 2. We hebben nu dus eigenlijk een bord van 2×2. Dit geval is erg makkelijk en geeft als antwoord dat Albert altijd twee stenen kan plaatsen. Daarna probeerde ik een 3×3-bord. Na wat proberen had ik mezelf ervan overtuigd dat het antwoord hier $K = 4$ was. Vervolgens ging ik door naar het 4×4-bord in de hoop een patroon te ontdekken. Hier werd het wat moeilijker. Doordat er zoveel mogelijke zetten zijn is het moeilijker om zeker te zijn van je antwoord. Ook is het daardoor goed mogelijk dat je jezelf per ongeluk van het verkeerde antwoord overtuigt, waardoor je de opgave nooit zult oplossen. Ikzelf was niet zeker of het antwoord hier 4 of 5 was. Toen ik er niet gelijk uit kwam, ben ik eerst een stap teruggegaan. Wat betekent het eigenlijk als het antwoord bijvoorbeeld 5 zou zijn? Dat betekent dus dat Beatrix door haar stenen slim te plaatsen ervoor kan zorgen dat Albert nooit zes stenen kan plaatsen. Albert kan echter door zijn stenen slim te plaatsen er wel vijf plaatsen. Ook bij het 20×20-bord moet je deze beide kanten geven: een manier waarop Albert zijn stenen kan plaatsen zodat hij er zoveel mogelijk (minstens K) kan plaatsen, en een bewijs dat Albert – als Beatrix het goed speelt – nooit meer dan K stenen kan plaatsen. Misschien

lukt het ons een van deze kanten al wel te bewijzen. Nu komt ervaring met olympiadeopgaven om de hoek kijken.

Kleuring van vakjes

Bij de training hebben we redelijk wat opgaven met een bord gezien, waarbij een zogenaamde kleuring van de vakjes handig is. De manier waarop de opgave origineel verwoord was, had ons hier tegengewerkt. Maar we weten nu dat de opgave eigenlijk over een bord en iets met paardensprongen gaat. Dan denk je dus al snel aan een schaakbord. Bij dit bord zijn de vakjes om en om wit en zwart gekleurd. De schaakspelers onder ons weten vast ook wel dat een paard altijd van een wit naar een zwart vakje springt en andersom. Als we nu ons 20 × 20-bord met een schaakbordpatroon kleuren, hebben we 200 zwarte en 200 witte vakjes. Als twee vakjes een paardensprong van elkaar afliggen, moet de een wit en de ander zwart zijn. Als Albert al zijn stenen dus op zwart gaat leggen, kunnen er nooit twee stenen een paardensprong van elkaar af liggen. Stel nu dat Albert dit gaat doen, hoeveel stenen kan hij dan neerleggen? In het ergste geval voor Albert legt Beatrix haar stenen ook telkens op een zwart vakje. Als na 200 beurten alle zwarte vakjes bedekt zijn, liggen er 100 rode stenen. We weten nu dat Albert sowieso 100 stenen kan neerleggen.

Past er nu nog een rode steen bij, op een *wit* vakje? Mogelijk, als alle rode stenen aan de linkerkant van het bord liggen, dan passen er aan de rechterkant van het bord nog wel rode stenen. Maar het is goed voor te stellen dat Beatrix haar stenen wat meer verspreid heeft neergelegd zodat de rode stenen ook over het hele bord moeten liggen en er dus geen rode stenen meer bij passen. We hebben dus nu ons eerste idee voor een antwoord. Met deze strategie kan Albert hoe dan ook minstens 100 stenen neerleggen. Misschien is dit ook het maximum en geldt dus $K = 100$.

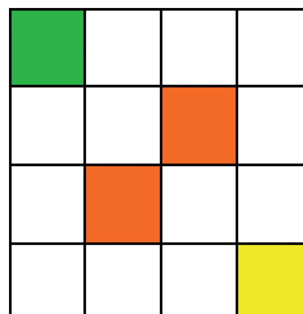
Zoals je kunt zien, hebben we al best veel moeten doen om een eerste idee van een antwoord te krijgen. Ik kan je verklappen dat we gelijk het goede hebben gevonden, maar er zijn genoeg deelnemers die een verkeerd vermoeden hadden. Als je drie opeenvolgende kolommen volledig zwart, wit en oranje kleurt en dat steeds herhaalt en dan alleen op zwarte vakjes speelt, dan komen twee stenen ook nooit $\sqrt{5}$ van elkaar te liggen. De ondergrens die we met deze strategie vinden, is 70 (want er zijn nu 140 zwarte vakjes en in het ergste geval speelt Beatrix ook steeds op een zwart vakje). Maar dit is blijkbaar niet een optimale strategie, want we hebben zojuist al een betere strategie gezien waarmee Albert maar liefst 100 stenen kan plaatsen. Zou het nog beter kunnen?

Bewijs

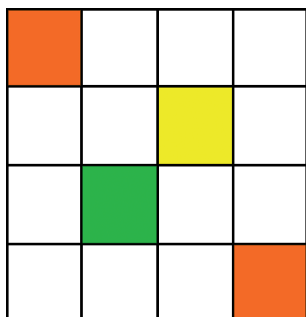
We gaan nu bewijzen dat Beatrix er inderdaad voor kan zorgen dat Albert nooit meer dan 100 stenen kan neerleggen. We kunnen daarvoor net doen alsof het doel van Beatrix is om te zorgen dat Albert zo min mogelijk stenen kan neerleggen. Dit betekent dus dat uiteindelijk hooguit op een kwart van de vakjes een rode steen ligt. Bij de kleinere borden van 2 × 2 en 3 × 3 lukte het Albert een groter deel te bedekken. Bij een 4 × 4-bord was 4 een mogelijk antwoord en dat is precies een kwart van het aantal vakjes. Als we nu kunnen bewijzen dat het antwoord bij een 4 × 4-bord ook echt $K = 4$ is, zijn we klaar. We kunnen het bord van 20 × 20 namelijk opdelen in 25 kleinere deelborden van 4 × 4. Als Albert in elk bord maximaal een kwart van de vakjes kan bedekken, dan kan hij op het hele bord ook maximaal een kwart bedekken en is het maximum dus 100. Hoe vinden we nu een goede strategie bij het 4 × 4-bord? Natuurlijk hangt deze strategie af van wat Albert doet. We willen de strategie dus verwoorden als: als Albert hier zijn steen neerlegt, dan legt Beatrix haar steen daar neer. Je kunt eens wat proberen en dan vind je de volgende voorwaarden voor de strategie:

1. Beatrix moet bij een schaakbordkleuring telkens op dezelfde kleur spelen als Albert (kun je bedenken waarom?);
2. Je moet kunnen garanderen dat Beatrix op een leeg vakje speelt;
3. Beatrix wil op een vakje spelen dat twee paardensprongen van het vakje van Albert afligt.

De tweede voorwaarde is er een die vaak wordt vergeten, maar die wel belangrijk is: Beatrix moet bij haar strategie wel altijd legale zetten blijven doen. De derde voorwaarde is er een die je echt door je kleine gevallen ingegeven krijgt. We bekijken een voorbeeld, zie figuur 1. Als Albert op het groene vakje speelt, dan kan hij daarna niet meer op de oranje gekleurde vakjes spelen. Albert zou dus de volgende beurt graag op het gele vakje spelen want daardoor zouden er geen extra oranje vakjes (in dit 4 × 4-vierkant) bij komen. Dus lijkt het slim van Beatrix om op het gele vakje te spelen. Als Albert juist op het gele vakje speelt, geldt dat het voor Beatrix slim is om op het groene vakje te spelen.



figuur 1



figuur 2

Als Albert juist een van de middelste vakjes kiest, zeg het groene vakje in figuur 2, dan zijn de twee oranje hoeken verboden (en daarnaast nog twee andere vakjes die we gemakshalve negeren). Weer is er een (geel) vakje waar Albert nu graag de volgende beurt zou willen spelen. En wederom lijkt het slim als Beatrix juist dit vakje kiest om haar steen te leggen. Het valt op dat de oranje vakjes en de andere gekleurde vakjes precies van plaats zijn gewisseld. In beide gevallen komt op de vier gekleurde vakjes in totaal een rode steen. Dat is precies de verhouding die we willen hebben. Wij hebben voor deze vakjes dus een werkende strategie, die bovendien ook aan voorwaarde 1 en 2 voldoet. Ook voor de andere vakjes kunnen we zo'n strategie vinden. Zo kunnen we het hele bord als volgt indelen, zie figuur 3.

1	2	3	4
6	5	8	7
7	8	5	6
4	3	2	1

figuur 3

Als Albert nu een vakje met getal m erin kiest, dan kiest Beatrix het andere vakje met getal m erin. De vakjes met daarin $9 - m$ zijn zo uitgekozen dat Albert nu in deze vakjes geen steen meer kan leggen. Van de vier vakjes met daarin m of $9 - m$ komt dan op hooguit een vakje één rode steen. Omdat dit voor elke m geldt en voor elk van de 25 deelborden, komt op deze manier op maximaal een kwart van de vakjes een rode steen, dus 100 rode stenen. Deze strategie voor Beatrix werkt dus! We zijn er. We moeten nog wel een argument geven, waarom aan voorwaarde 2 wordt voldaan (waarom is dat?), maar dan zijn we klaar.

Tot slot

De opgave bestond dus uit twee kanten. Bij de ene kant hadden we het schaakbord nodig dat door de verwoording verborgen was. Bij de andere kant moesten we bedenken dat we het bord in 25 kleinere vierkanten konden opdelen en dan een goede strategie binnen dit vierkant vinden. De kant van de schaakbordkleuring is wat simpeler en wat meer standaard; toch was deze voor mij het belangrijkst, want toen ik deze kant had bedacht, had ik een doel waar ik naartoe kon werken: 100.
Deze uitwerking, alleen dan iets formeler opgeschreven, heb ik ook ingeleverd. Ondanks dat mijn bewijs af was, was ik toch blij te horen dat de rest van het team ook op 100 uitkwam en ik dus geen domme fout had gemaakt. Dat betekende dus ook dat het hele Nederlandse team op het goede antwoord was uitgekomen. Hiermee waren we een van de weinige landen die erin waren geslaagd om 100% van de punten voor deze opgave te halen. Voor een van ons leverde dit een eervolle vermelding op: een certificaat dat je krijgt om aan te geven dat je een opgave volledig hebt opgelost. Voor de rest van het team droegen de punten van deze opgave bij aan een score die ervoor zorgde dat ze een medaille kregen. Daardoor konden we uiteindelijk thuiskomen met een eervolle vermelding, vier bronzen medailles en een zilveren medaille!



Het Nederlandse Olympiadeteam met vlnr: Richard Wols (winnaar aanmoedigingsprijs), Matthijs van der Poel, Nils van de Berg, Jippe Hoogeveen, Thomas Chen, Jovan Gerbscheid en Szabi Buzogány

Over de auteur

Als vwo-scholier aan het Sint-Oelbertgymnasium in Oosterhout (Noord-Brabant) heeft Nils van de Berg drie jaar lang deelgenomen aan het trainingsprogramma van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. In zowel 2017 als 2018 maakte hij deel uit van het Nederlandse team dat naar de Internationale Wiskunde Olympiade ging, waar hij achtereenvolgens een eervolle vermelding en een bronzen medaille behaalde. Hij begint dit jaar aan zijn eerste jaar van de studie Mathematics aan Cambridge University.

WIS EN WAARACHTIG

Deze rubriek is een impressie van zaken die van belang zijn voor docenten wiskunde. Wilt u een wetenswaardigheid geplaatst zien, uw collega's op de hoogte brengen van een belangwekkend nieuwsfeit dat u elders heeft gelezen of verslag doen van een wiskundige activiteit? Stuur ons uw tekst, eventueel met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor bijdragen in te korten of niet te plaatsen. Bijdragen naar *wisenwaarachtig@nvvw.nl*

Wiskundetalent bij kleuters

Uit Vlaamse peilingen blijkt dat jongens het op het einde van de lagere school systematisch beter doen in wiskunde dan meisjes. Onderzoekers van de KULeuven gingen na of jongens misschien van nature meer aanleg hebben voor wiskunde. Maar dat blijkt niet het geval. Een team van professor Bert De Smedt onderwierp 400 vier- en vijfjarige kleuters aan verschillende wiskundige testen, van het tellen van voorwerpen, het benoemen van cijfers, het ordenen van getallen, tot het maken van eenvoudige rekensommen. En de conclusie was heel duidelijk, zegt De Smedt: 'Er is eigenlijk geen enkel verschil tussen jongens en meisjes in de kleuterschool wat betreft wiskundige vaardigheden. De gemiddelde scores liggen erg dicht bij elkaar. Dat jongens vaker de eindtermen voor wiskunde halen is dus niet het gevolg van een verschil in aangeboren vaardigheden.'
Bron: *vvwl.mathelo.net/onderzoek-naar-wiskundetalent-bij-kleuters/*

Stedelijk Gymnasium Nijmegen wint 27e wiskundetoernooi RU

Op 21 september jl. organiseerde de Radboud Universiteit Nijmegen voor de 27e keer het wiskundetoernooi. 98 teams van vier of vijf leerlingen gingen met elkaar de strijd aan om de hoofdprijzen te winnen: een weekendje weg samen met de winnaars van het Belgische (Leuven) en Duitse (Bonn) wiskundetoernooi. De reizen gingen naar teams van het Christelijk Gymnasium Utrecht (3e), het Eckartcollege Eindhoven (2e) en het Stedelijk Gymnasium Nijmegen (1e).
Voor opgaven en foto's: *www.ru.nl/wiskundetoernooi/*

Ophef over 'censuur' op wiskundig model over man-vrouwverschillen

In Amerika is een wiskundig artikel over genetische variatie middelpunt van hevige polemiek. Het presenteert een model dat via een sekseverschil in partnerselectiviteit verklaart waarom er, bijvoorbeeld, veel meer mannelijke dan vrouwelijke Nobelprijswinnaars zijn. Als het model klopt, is de over-representatie van mannen in de top van de bètawetenschappen vooral een gevolg van de eigenschappen van de normaalverdeling. Het artikel van wiskundigen Tim Hill en Sergei Tabachnikov werd verwijderd uit het online-tijdschrift waarin het was verschenen. De gang van zaken werpt de vraag op of je zo'n hypothese aan een Amerikaanse universiteit nog kunt bespreken. Zie de website van kennislink voor meer informatie. Bron: *Wiskunde PersDienst*

Muffinprobleem

Op een koude woensdag in maart van dit jaar bezocht Alan Frank een voordracht van wiskundige William Gasarch. Frank, softwareontwikkelaar en liefhebber van wiskunderaadsels, had een doos muffins meegebracht om uit te delen. Daar had hij een reden voor, want Frank is de bedenker van het zogeheten muffinprobleem, het onderwerp van de voordracht waarvoor Frank speciaal was gekomen.
Je moet vijf muffins onder drie studenten verdelen. Hoe doe je dat, als ze allemaal even veel moeten krijgen? De simpelste oplossing is om elke student één hele muffin te geven, van elk van de overige muffins 1/3 af te snijden en elke student nog 2/3 muffin te geven. Maar kan het ook anders? Bestaat er een snijmethode waarbij het kleinste muffinstuk groter dan 1/3 is?
Zo'n methode is er inderdaad: deel één muffin in twee gelijke helften en de andere muffins in porties van 5/12 en 7/12. Twee studenten krijgen ieder een halve en twee stukken van 7/12, de derde student krijgt vier stukken van 5/12. Het kleinste stuk van 5/12 is dan inderdaad groter dan 1/3. Beter dan dit kan niet: het kleinste stuk kan niet groter dan 5/12 zijn, zie figuur 1.
Frank bedacht dit muffinprobleem in 2009. Later werd dit probleem algemener gesteld: verdeel m muffins onder s studenten zodat iedere student evenveel krijgt, maar waarbij het kleinste stuk zo groot mogelijk is. Dit algemene probleem is nog niet opgelost, wel zijn er deelresultaten. Bijvoorbeeld, zijn er drie studenten en is het aantal muffins een drietal plus één, dan is de optimale grootte van het kleinste stuk gelijk aan $(m - 2)/(2m - 2)$. Is het aantal muffins dan een drietal plus twee, dan is dat $m/(2m + 2)$.



Bewijs dat het kleinste stuk niet groter dan 5/12 kan zijn

Muffinprincipe 1: als een muffin in 3 stukken wordt gesneden, heeft het kleinste stuk hoogstens grootte 1/3

Muffinprincipe 2: als 10 muffinstukken onder 3 studenten worden verdeeld, heeft minstens één student minstens 4 stukken

Muffinprincipe 3: als een student 4 stukken krijgt (waarvan het totaal 5/3 is), heeft het kleinste stuk daarvan hoogstens grootte 5/3 × 1/4 = 5/12

Neem aan dat elke muffin in minstens 2 stukken wordt gesneden. Deze aanname is geen beperking: als een student een hele muffin krijgt, vat die muffin dan op als twee halve muffins. Er zijn nu twee elkaar uitsluitende mogelijkheden.

Mogelijkheid 1: van de 5 muffins is er minstens één die in minstens 3 stukken wordt gesneden. Volgens muffinprincipe 1 heeft het kleinste stuk dan hoogstens grootte 1/3 en dat is kleiner dan 5/12.

Mogelijkheid 2: alle muffins worden in 2 stukken gesneden. Er zijn dan 10 stukken in totaal. Volgens muffinprincipe 2 is er dan een student met minstens 4 stukken. Van die stukken heeft volgens muffinprincipe 3 het kleinste stuk hoogstens grootte 5/3 × 1/4 = 5/12.

NRC 150918 / Rik Bors / Bron: Alex van den Brandhof, William Gasarch

figuur 1

Bron: *NRC* 15/16 september 2018

REKENEN ALS EEN ROBOT, WIE WIL DAT NOU?

Martin Kindt

Onlangs hoorde Martin Kindt de verzuchting: gelukkig weten de leerlingen weer dat 'delen door een breuk hetzelfde is als vermenigvuldigen met het omgekeerde'. Maar hoe 'gelukkig' is dat en hoe hebben ze dit kunstje geleerd? En een gevaar ligt om de hoek: je moet wel de juiste breuk omkeren! Het verhaal gaat dat zelfs leraren hierbij wel eens in de fout gingen ...

Bijles

Hé, Pawel Wasiljitsj! roept Pelageja Iwanowna haar man wakker. Je moest je liever eens wat met Stepa gaan bemoeien, want die zit over zijn boek gebogen te huilen. Er is weer iets dat hij niet snapt!



Anton Tsjechov (1860 - 1904)

Aldus begint 'Vastenavond', een van die mooie verhalen die Anton Tsjechov in 1887 schreef.[1] Pawel W. gaat dan, zonder zich te haasten, naar de kamer van zoonlief, die hij aantreft met betraande ogen. Hij plaagt hem een beetje, zo van: 'smaakt de wetenschap niet zo lekker na al die pannenkoeken van gisteravond?' Dan volgt er:

– Is er iets wat je niet duidelijk is?
– Ja, kijk ... dat delen van die breuken! antwoordt de jongen boos, hoe je die ene breuk op de andere delen moet ...
– Hm, je bent me ook een rare! Wat is daar nu aan? Daar hoef je toch je hoofd niet over te breken? Leer gewoon de regel van buiten en klaar ben je. Om een breuk op een andere te delen moet je de teller van de ene breuk vermenigvuldigen met de noemer van de andere en dat wordt dan de teller van je deelsom ...

Nou ja, en dan verder, dan neem je de noemer van de eerste breuk ....
– Ja, dat weet ik allemaal ook wel zonder jou! valt Stepa hem in de rede, (...) je moet me het bewijs laten zien!
– Het bewijs? Goed, geef je potlood en luister. Stel dat we zeven achtsten moeten delen door twee vijfden. Goed. Weet je, kerel, de kneep zit 'm daarin, dat je die breuken de een op de ander delen moet (...). Maar goed, luister. We zullen zo redeneren; stel, dat we die zeven achtsten nu eens niet door twee vijfden, maar door twee, dus alleen door de teller moesten delen. Goed, dat doen we, wat krijgen we dan?
– Zeven zestienden.
– Juist! Knappe jongen! Welnu, kerel de hele kneep zit 'm daarin, dat we ... als we door twee gedeeld hebben, dan krijgen we dus ... Wacht even, daar ben ik zelf in de war geraakt.

Vader weet kennelijk niet meer hoe het verder moet en begint dan te vertellen over de slechte wiskundeleraar die hij vroeger heeft gehad, die geen orde kon houden en voortdurend vastliep in een bewijs. Hij is nog niet klaar met zijn verhaal als moeder hen roept voor het ontbijt. En de schrijver komt in zijn verhaal niet meer terug op het delen van breuken.

Socratisch leergesprek

Ik neem aan dat Tsjechov zelf de achtergrond van de regel 'delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde' goed begreep en dat hij volstond met het hekelen van wat we nu mechanistisch (of traditioneel) rekenonderwijs noemen. En laten we wel zijn, een verdere uitleg zou wel wat te veel hebben geëist van het uithoudingsvermogen van de gemiddelde lezer.
Misschien zal Tsjechov - als een moderne Plato – wel een voortzetting van het afgebroken leergesprek van Pawel Wasilitsj (in de rol van Socrates) en Stepa voor ogen hebben gezweefd. Ik verzin hier zo'n vervolg:

– *Als we door twee hebben gedeeld, dan krijgen we dus een breuk die twee keer zo klein is als zeven achtsten. Ben je het daarmee eens?*
– *Ja.*
– *Dus als je de noemer van een breuk tweemaal zo groot maakt, dan …?*
– *Dan wordt de breuk tweemaal zo klein.*
– *Mooi zo, en als je nu deelt door een getal dat kleiner is dan twee, wordt de uitkomst dan groter of kleiner dan zeven achtsten?*
– *… groter, ja natuurlijk, groter!*
– *En als dat getal waar je door deelt nu eens vijf keer zo klein is als twee, hoeveel keer zo groot wordt de uitkomst dan?*
– *Eh … vijf keer zo groot, denk ik.*
– *Ja, zo is het! En hoeveel keer zo klein is twee vijfden in vergelijking met twee?*
– *Vijf keer, vanzelf.*
– *Dus bij deling van zeven achtsten door twee vijfden moet je die zeven zestienden van daarnet nog …*
– *Met vijf vermenigvuldigen.*
– *En wat komt er dan uit?*
– *Even kijken …, vijf en dertig zestienden.*
– *Ja, helemaal goed !*
– *Snap je het nu, jongen?*
– *Ik geloof van wel …*

Ik zeg niet dat de hier gesuggereerde uitleg de meest ideale is, maar het is wel een van de mogelijkheden om het delen door een breuk te leren begrijpen.

De 'algemene' noemer

Ook in de Nederlandse literatuur van de 19de eeuw vond ik iets over breukrekenen. Multatuli's geesteskind Woutertje Pieterse repeteert, als hij in de wachtkamer zit voor een sollicitatiegesprek bij de firma Ouwetijd & Kopperlith, al mijmerend de kennis die hij opgedaan heeft op de basisschool: 'En als er breuken zijn, … lastig is 't, nu ja, maar ik zoek de algemene noemer.'

Bij een presentatie over breukrekenen heb ik aan de toehoorders wel eens deze inleidende vraag gesteld: *In welke situaties heeft het zin om twee breuken gelijknamig te maken?* Een vraag die reflectie uitlokt en die je daarom ook heel goed aan een klas zou kunnen voorleggen. De verwachte antwoorden kwamen vlot: 'als je breuken wilt optellen of aftrekken' en kort daarna 'of als je wilt weten welke van twee breuken het grootst is'. Het antwoord 'als je ze op elkaar wilt delen' kwam zelden. Voor de lezer die nu zijn wenkbrauwen fronst:

$$\frac{7}{8} : \frac{2}{5} = \frac{35}{40} : \frac{16}{40} = \frac{35}{16} = 2\frac{5}{16}$$

Dit werkt dus ook en ik denk dat het in eerste instantie makkelijker te snappen is dan de befaamde vuistregel die zegt dat je de 'deler-breuk' moet omkeren en dan vermenigvuldigen met de 'deeltal-breuk'. Het risico van het aanleren van het gelijknamig maken van de twee breuken bij een deling is misschien dat de leerlingen dan ook bij vermenigvuldigen 'onder één noemer brengen' (waarom zeggen we trouwens niet 'boven' één noemer?) en dan alleen de tellers vermenigvuldigen'. Tja …

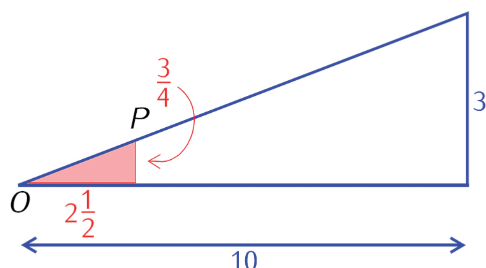
We kunnen het wel, maar snappen het niet



Stepa in het verhaal van Tsjechov, wilde duidelijk niet rekenen als een robot. Hij nam geen genoegen met een voorgekauwde standaardprocedure, nee, hij wilde een 'bewijs'. 'Bewijs' in zijn eigenlijke rol: om te begrijpen en om overtuigd te raken.
Ik herinner me een voorval van lang geleden. Onze tweeling kwam uit school - ze zaten toen in wat nu groep acht heet, maar toen de zesde klas was – en spraken als het ware uit één mond: 'papa, we hebben iets nieuws geleerd met breuken, we kunnen het wel, maar snappen het niet! Ik kon wel raden waar het over ging, en - mijn beroepseer stond op het spel - ik moest spontaan een didactische oplossing bedenken. Zo kreeg ik de inval dat 'gelijknamig maken' een oplossing bood voor een inzichtelijk resultaat. Via een rijtje van geschikte voorbeelden, waren de problemen voor hen snel opgelost. Althans ze konden nu controleren dat de resultaten overeenkwamen met die van de op school geleerde, raadselachtige regel. Óf en hóe ik toen het verband heb uitgelegd met de procedure die de leraar had voorgeschreven, kan ik me niet meer herinneren.
In dit licht vermeld ik een ervaring van een collega van een paar jaren terug. In een vergadering van een commissie over het rekenonderwijs, werd gevraagd waarom 'delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde' niet in een lijst van standaard-procedures was opgenomen. Het antwoord van een van de commissieleden luidde: omdat je ook kunt delen door de breuken gelijknamig te maken. 'Dat mag niet' was het antwoord van een wiskundige. Ik kon het niet geloven en besloot een onderzoekje te doen onder natuurkundedidactici. Zo van: hoe reken jij een sommetje als 'zeven achtsten gedeeld door twee vijfden' uit. Eén antwoord was: ik vermenigvuldig ze eerst allebei met 40. En dat is misschien wel de beste aanpak ..

Het hellingmodel

In *Euclides* heb ik eerder enige artikelen[2] gewijd aan het idee om, althans in het voortgezet onderwijs, het rekenen met breuken te koppelen aan het begrip 'helling van een rechte lijn'. Ieder heeft wel eens van 'stijgings-percentage' gehoord en om in plaats daarvan te werken met het quotiënt van verticale en horizontale 'sprong' is geen grote stap. En dat de helling niet verandert als de beide 'sprongen' met dezelfde factor worden vergroot (of verkleind), is intuïtief duidelijk. Schaalvergroting van figuren, daar zijn we bij wijze van spreken vanaf de wieg al mee vertrouwd. In figuur 1 is te zien hoe het rode driehoekje met een factor 4 is vermenigvuldigd.



figuur 1

Figuur 1 kan dienen als illustratie bij:

$$\text{helling}\,OP = \frac{\frac{3}{4}}{2\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{4}\times 4}{2\frac{1}{2}\times 4} = \frac{3}{10}$$

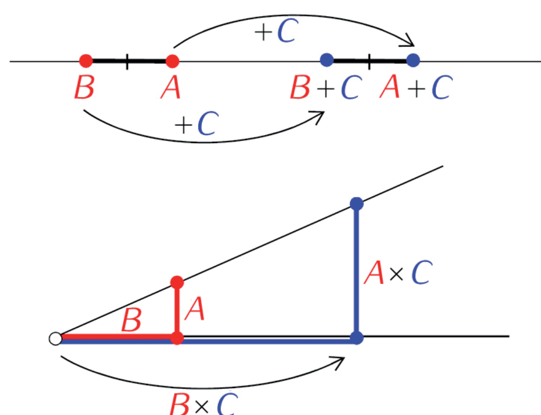
Twee isomorfe rekenwetten

Dat de verhouding van twee getallen hetzelfde blijft als je beide met eenzelfde getal (≠ 0) vermenigvuldigt, is een van de basisprincipes van de verhoudingstabel. Je kunt eigenlijk wel op je klompen aanvoelen dat dit waar is, figuur 1 maakt de zaak aanschouwelijk.
Een isomorfe eigenschap vind je bij het verschil van twee getallen. Als je bij beide getallen hetzelfde getal optelt, verandert het verschil niet. Ook hier zorgt een plaatje - de getallenlijn - voor duidelijkheid in één oogopslag. Naar mijn smaak zouden deze beide eigenschappen, die ik hieronder in formele taal schrijf, meer expliciete aandacht moeten krijgen in het onderwijs.

I $A - B = (A + C) - (B + C)$ .... (V+)
II $A : B = (A \times C) : (B \times C)$ .... (D×)

NB: bij II hoort natuurlijk de voorwaarde dat $C \neq 0$.

De hierbij passende plaatjes staan in figuur 2:



figuur 2

Deze regels kun je voortdurend met succes toepassen, zowel in het basis als in het voortgezet onderwijs.
Uit mijn schooljeugd herinner ik me nog hoe een aantal medeleerlingen moeite had met 'lenen' en 'onthouden' bij aftrekking van getallen met meer dan twee cijfers. Het is niets nieuws als ik zeg dat je handig kunt zijn en de aftrekker eerst wat 'mooier' maken.
Bijvoorbeeld:

1961	$\xrightarrow{+16}$	1977
1784	$\xrightarrow{+16}$	1800
– ?		177 –

Een handige toepassing van regel (V+). En je moet er ook een beetje bij nadenken. Aan degenen die volhouden dat je toch vooral de klassieke procedures erin moet slijpen, en rekenen als een robot, zeg ik: 'mensen moet je niet willen programmeren'. Of om het fraaier met Freudenthal te zeggen: 'It's a human right and dignity to learn by insight and understanding".

Bij het rekenen met negatieve getallen levert regel (V+) ook didactische winst op. Kijk maar;

$78-(-55)$
$+55 \downarrow \qquad \downarrow +55$
$133 - 0 = 133$

Eventueel kan een minder rekenvaardige leerling nog wat meer tussenstapjes maken, bijvoorbeeld van die 78 eerst 80 en van die - 55 eerst - 53 maken.

Zulke voorbeelden geven inzicht in de regel die - als de tijd rijp is! - aldus kan worden geformuleerd: ‘*aftrekken van een getal is optellen met het tegengestelde*’.

Als de tijd rijp is, en dat geldt ook voor de regel waar Stepa in het verhaal van Tsjechov mee worstelde. Bij de deling die zijn vader als voorbeeld koos, kun je tenslotte ook beide breuken zo vermenigvuldigen dat de tweede breuk 1 wordt:

$$\frac{7}{8} : \frac{2}{5} \quad \xrightarrow{\times \frac{5}{2}} \quad \frac{35}{16} : 1 = \frac{35}{16}$$

Natuurlijk, je moet dan eerst hebben ingezien dat ‘twee breuken zijn elkaars omgekeerde’ hetzelfde betekent als ‘het product van twee breuken is gelijk aan 1’.
Langs deze weg, waarbij de deler ‘geneutraliseerd’ wordt, kan de ‘standaardprocedure’ steunen op inzicht.
De kern van wiskunde is dat het ‘waarom’ voorafgaat aan het ‘hoe’. Dat het ‘hoe’ (of parten daarvan) meestal meer beklijft (of beklijven) dan het ‘waarom’ is helaas de realiteit. In zijn beroemd geworden rede[3] in 1934 stelde Dijksterhuis dat *de leerling op elk ogenblik in staat moet zijn, zichzelf en anderen rekenschap te geven van de betekenis van de termen die hij gebruikt en van de motivering van de methoden die hij toepast*. Hooggestemd idealisme? Zeker. Er is echter ook een didactische aspect. Door bij herhaling nadruk te leggen op de ‘opbouw’ en het ‘waarom’ kan worden bereikt dat de leerling een basis heeft om een algoritme, zo nodig, zelf te reconstrueren!

Noten

[1] Tsjechov, A., *Verhalen 1886-87*, G.A. van Oorschot, 1954.

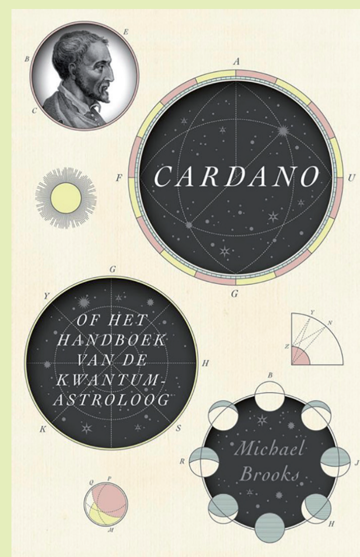
[2] Kindt, M. (2015). Breuken op de helling (1) en (2). *Euclides, 90* (5 en 6).

[3] Dijksterhuis E.J. (1934). Epistemisch wiskunde-onderwijs. *Euclides, 10* (4), pp. 165-213.

Over de auteur
Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplanontwikkelaar en onderzoeker. Ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: *M.Kindt@uu.nl*

VERSCHENEN

CARDANO



Titel:
Cardano of het handboek van de kwantumastroloog
Auteur: Michael Brooks
Uitgever: Uitgeverij Omniboek (2018)
ISBN: 978-94-0191-344-7
Prijs: € 22,50 (224 pagina’s; paperback)

Van de uitgever:
Gerolamo Cardano, de hoofdpersoon van Michael Brooks’ *Cardano of het handboek van de kwantum-astroloog*, was een uomo universale die leefde in de zestiende eeuw. Hij was gokker, uitvinder, astroloog, filosoof, jurist en medicus. Cardano was betrokken bij de ontdekking van het complex rekenen en de kansberekening, en is daarmee in feite de vader van de kwantumtheorie. Michael Brooks gaat in gesprek met Cardano, en legt je en passant de basis-beginselen van de kwantumfysica uit. *Cardano of het handboek van de kwantumastroloog* is een briljant boek, dat leest als een roman.

GEBRUIK EN MISBRUIK VAN BOXPLOTS

Simon Biesheuvel
Gerard Koolstra

Boxplots: een mooie manier om snel een verdeling in beeld te brengen. Maar ingewikkelder dan je denkt. Zeker als ze worden aangeleerd met relatief kleine hoeveelheden data. Daar kan het wel eens misgaan, signaleren Simon Biesheuvel en Gerard Koolstra.

Het probleem

Het idee voor dit artikel kwam na het vergelijken van de manier waarop de boxplot in diverse wiskundemethodes voor havo en vwo wordt geïntroduceerd, en wordt gebruikt. Vaak wordt uitgegaan van de mediaan als het middelste getal (en bij een even aantal gegevens het gemiddelde van de middelste twee) als de gegevens geordend staan van klein naar groot. Het eerste kwartiel Q_1 is de mediaan van de linkerhelft en Q_3 is de mediaan van de rechterhelft (bij een oneven aantal getallen wordt de middelste niet bij de linkerhelft en ook niet bij de rechterhelft genomen). Het kleinste getal geven we in het vervolg met Q_0 aan, het grootste getal met Q_4 en de mediaan met Q_2.

De verdeling in vieren komt uiteraard ook aan de orde en dan komen de verschillen. De ene methode stelt dat tussen Q_0 en Q_1 zich 25% van de waarnemingen bevindt. Een andere methode trekt een lijn onder Q_0 en Q_1 met erbij 25% en laat in het midden of de grenzen erbij horen.

Een heel simpel voorbeeld ter illustratie: we bekijken de getallen 10, 20, 30, 30, 40 en 60.

Volgens de gangbare aanpak geldt: $Q_0 = 10$, $Q_1 = 20$, $Q_2 = 30$, $Q_3 = 40$ en $Q_4 = 60$.

Tussen Q_0 en Q_1 bevindt zich nul procent van de waarnemingen, en als je de grenzen erbij neemt vind je ruim 33%, dus echt geen 25%. Waarom leren leerlingen dan met eenvoudige voorbeelden (weinig gegevens) hoe je een boxplot maakt, terwijl die net geleerde 25% regels niet gelden?

Het ontstaan

In 1970 gebruikt *John Tukey* voor het eerst 'box and whisker plots' als middel om gegevens te analyseren. Deze nieuwe representatie trok pas aan het eind van de jaren 70 van de vorige eeuw brede belangstelling. In het statistiekonderwijs op het vo speelt de boxplot terecht een belangrijke rol. Het is een mooi middel om met een relatief eenvoudige tekening kansverdelingen in beeld te brengen. Helaas leidt het enthousiasme voor dit diagram soms ook tot voorbeelden en opgaven, waar boxplots eigenblijk niet goed bruikbaar zijn. Discussies over de 'juiste' manier om bijvoorbeeld het eerste kwartiel te bepalen hebben hier vaak mee te maken.

Bij de formele definitie van het eerste kwartiel Q_1 is essentieel dat *hoogstens* een kwart van de data kleiner is dan Q_1 en *hoogstens* driekwart groter. Voor het derde kwartiel geldt precies het omgekeerde: hoogstens driekwart kleiner en hoogstens een kwart groter, en bij de mediaan moet hoogstens de helft kleiner, en hoogstens de helft groter zijn.

Toegepast op de acht (priem)getallen 23 29 31 37 41 43 47 53 betekent dit dat moet gelden: $29 < Q_1 < 31$, $37 < Q_2 < 41$ en $43 < Q_3 < 47$. Het is gebruikelijk om te kiezen voor de gemiddelden, respectievelijk 30, 39 en 45, maar eigenlijk zijn er meerdere mogelijkheden. In elk geval wordt de geordende verzameling zo mooi in vieren gedeeld: 23 29 Q_1 31 37 Q_2 41 43 Q_3 47 53.

'BIJ WEINIG DATA HEEFT HET MAKEN VAN EEN BOXPLOT VAAK MEER NADELEN DAN VOORDELEN.'

Wanneer we een negende getal toevoegen wordt het heel anders. Het eerste kwartiel van 23 29 31 37 41 43 47 53 59 moet *hoogstens* 31 zijn, anders ligt meer dan een kwart van de waarden eronder, maar ook *minstens* 31, anders ligt meer dan driekwart van de waarden erboven. Conclusie: $Q_1 = 31$. Op dezelfde manier volgt $Q_2 = 41$ en $Q_3 = 47$. In dit geval vallen de kwartielen samen met data: 23 29 31 37 41 43 47 53 59.

Hoewel bovenstaande kwartielbepaling geheel volgens het boekje is gegaan, is het resultaat voor velen niet bevredigend. Als alternatief wordt dan ook vaak gekozen voor: 23 29 Q_1 31 37 41 43 47 Q_2 53 59, waarbij doorgaans geldt: $Q_1 = 30$ en $Q_3 = 50$.

Het toevoegen van een tiende getal betekent een verstevi-

ging van 31 als eerste kwartiel. Een vijfde van de getallen (minder dan een kwart) is kleiner, en 7/10e (minder dan driekwart) is groter. Bovendien is dit het enige getal waarvoor dit geldt (voor 30 geldt bijvoorbeeld dat 4/5e van de getallen groter is). We krijgen dan het volgende beeld: 23 29 31 37 41 Q_2 43 47 53 59 61.

Complicaties

Bij een even aantal data lijken er weinig problemen, zeker als het gaat om een viervoud. Maar als we te maken hebben met weinig verschillende data, dan kunnen er merkwaardige complicaties optreden. Ter illustratie de volgende twee verdelingen. Het gaat om de eindcijfers voor twee vakken van een groep van 28 leerlingen, zie tabel 1:

Cijfers	A	B
4	3	0
5	3	0
6	7	8
7	7	7
8	8	7
9	0	6

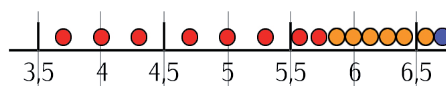
tabel 1

Duidelijk is te zien dat de cijfers bij B aanzienlijk hoger zijn dan bij A, gemiddeld scheelt het bijna een vol punt.

A 4 4 4 5 5 5 6 | 6 6 6 6 6 6 7 | 7 7 7 7 7 7 8 | 8 8 8 8 8 8 8
B 6 6 6 6 6 6 6 | 6 7 7 7 7 7 7 | 7 8 8 8 8 8 8 | 8 9 9 9 9 9 9

tabel 2

De kwartielen 1 t/m 3 zijn - bij de berekeningsmethode in tabel 2 – echter precies hetzelfde, en de boxplots zijn wat betreft de box (het middenstuk) dus voor A en B identiek! Erg bevredigend is dit niet.
Een oplossing is om de behaalde cijfers om te zetten in intervallen, klassen. Daar is veel voor te zeggen. Zeer waarschijnlijk krijgt iedereen die gemiddeld *g* staat met $5{,}5 \leq g < 6{,}5$ een zes als eindcijfer. De veronderstelling dat de gemiddelden gelijkmatig over het interval zijn verdeeld is niet zo gewaagd. De berekening van de kwartielen levert nu heel andere uitkomsten op. Bij wijze van illustratie Q_1 bij vak A. We gaan uit van getallen die ongeveer als in figuur 1 over de getallenlijn zijn verdeeld:



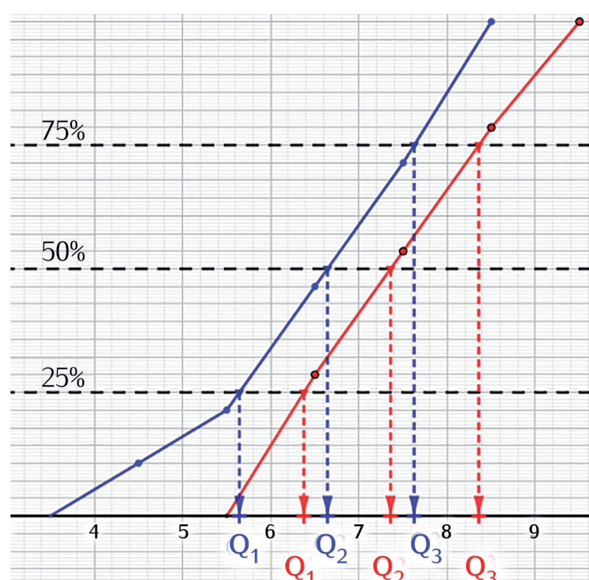
figuur 1

De 25% laagste cijfers zijn met rood aangegeven, de volgende 25% met oranje. Q_1 ligt nu iets boven de 5,5 – zo te zien tussen 5,6 en 5,7. Een meer precieze berekening werkt met *lineaire interpolatie*:

1 6/28e (≈ 21,4%) van de data liggen onder 5,5
2 13/28e (≈ 46,4%) ligt onder 6,5
3 De grens van 1/4e (7/28) ligt tussen 5,5 en 6,5 op 1/7e gerekend vanaf 5,5
$Q_1 = 5{,}5 + 1/7 \approx 5{,}64$

Via deze aanpak krijgen we de volgende resultaten:
A: $Q_1 \approx 5{,}64$ $Q_2 \approx 6{,}64$ $Q_3 \approx 7{,}63$ en
B: $Q_1 \approx 6{,}38$ $Q_2 \approx 7{,}36$ $Q_3 \approx 8{,}36$

Dit komt beter overeen met de indruk dat de resultaten bij B toch echt wat hoger zijn dan bij A. Met behulp van een somfrequentiepolygoon kunnen de kwartielen ook grafisch bepaald worden, zie figuur 2.



figuur 2

Het ligt voor de hand om ook Q_0 en Q_4 aan te passen, en dus als minimum 3,5 en als maximum 9,5 te nemen. Als er tienen zijn is de bovengrens 10,5, dat is in dit geval echter minder gelukkig.

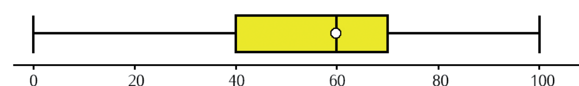
Uitsmeren of niet?

In veel gevallen ligt de interpretatie van meetpunten als intervallen voor de hand, maar het lijkt erop dat meestal in voorbeelden en opgaven deze mogelijkheid genegeerd wordt. Een van de voorbeeldopgaven die door het CvTE is vrijgegeven met het oog op het nieuwe statistiek-

programma gaat over het meten van bacteriële verontreiniging van melk. Op grond van tabel 3 (het gaat om het aantal bacteriën per cl), is door de opgavemaker de boxplot van figuur 3 gemaakt:

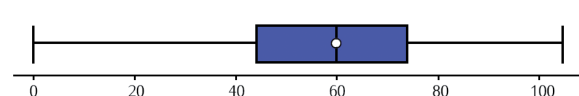
Aantal bacteriën	Frequentie
0	1
10	1
20	2
30	8
40	15
50	13
60	20
70	17
80	15
90	5
100	3
totaal	100

tabel 3



figuur 3

In dit geval ligt het voor de hand dat de data bepaald worden door de meetnauwkeurigheid, en dus beter als intervallen kunnen worden opgevat. Dat levert een wat ander beeld op, zie figuur 4.



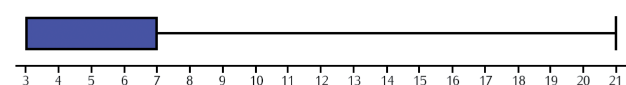
figuur 4

Een interpretatie van data met behulp van een klassenindeling ligt echter niet altijd voor de hand. Wat te denken bijvoorbeeld van een vakantiepark dat bijhoudt voor hoeveel nachten de huisjes worden verhuurd, zie tabel 4.

Aantal nachten	Aantal boekingen
3	1256
4	945
7	1568
14	867
21	159

tabel 4

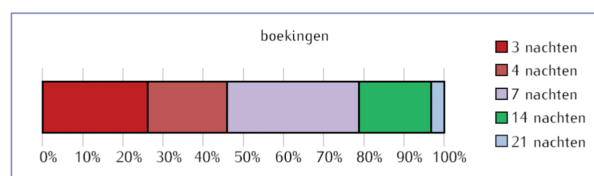
In dit geval doet het erg gekunsteld aan om de aantallen nachten als intervallen op te vatten. Wanneer we echter op een 'gewone' manier de kwartielen berekenen, krijgen we: $Q_0 = Q_1 = 3$, $Q_2 = Q_3 = 7$ en $Q_4 = 14$ met een boxplot dat er zo uitziet, zie figuur 5.



figuur 5

Conclusie

Wanneer we te maken hebben met weinig data heeft het maken van een boxplot vaak meer nadelen dan voordelen. Vooral bij oneven aantallen wordt dan de verdeling in vier groepen van gelijke omvang niet goed zichtbaar. Bij voldoende gegevens, maar weinig *verschillende* uitkomsten, is het de moeite waard om na te gaan of deze uitkomsten kunnen worden opgevat als klassenmiddens. Met behulp van lineaire interpolatie, bijvoorbeeld via een somfrequentiepolygoon, zijn dan de kwartielen nauwkeuriger te bepalen, en krijgen we een bruikbare boxplot. En wanneer er sprake is van weinig verschillende uitkomsten, die niet als klassenmiddens kunnen worden opgevat, geen boxplot gebruiken! Er zijn prima alternatieven. Een daarvan is een gestapeld staafdiagram. Dat zou er bij de vakantieparkboekingen als volgt uit kunnen zien, zie figuur 6.



figuur 6

Over de auteurs

Gerard Koolstra houdt zich na een dienstverband van veertig jaar als docent, bezig met allerlei zaken binnen en rond het wiskundeonderwijs, onder meer als redacteur van de WiskundE-brief. E-mailadres: *gerardk@xs4all.nl*
Simon Biesheuvel is na 43 jaar lesgeven nog steeds docent op het Willem de Zwijger College in Bussum.
E-mailadres: *s.biesheuvel@wdz.nl130*

MET 130 LEERLINGEN OP EXCURSIE

Simon Biesheuvel

Combinatoriek is moeilijker dan je denkt. Soms ook voor de makers van onze antwoordenboeken, ontdekte Simon Biesheuvel. Het kan zelfs aanleiding geven tot een jarenlange discussie waarvoor je wordt uitgenodigd om eraan deel te nemen.



Een combinatoriek probleem

Er komen drie bussen. Een bus voor 30, een bus voor 49 en een bus voor 51 leerlingen. De leerlingen worden dus ingedeeld in drie groepen.
Vraag 1: Hoeveel mogelijkheden zijn er?
Niet zo moeilijk, gewoon

$$\binom{130}{30}\cdot\binom{100}{51}\cdot\binom{49}{49}$$

en het derde product mag ook weggelaten worden.
Dus

$$\binom{130}{30}\cdot\binom{100}{51}.$$

En als we nu een bus voor 30, een bus voor 50 en een bus voor 50 leerlingen hebben.
Vraag 2: Hoeveel mogelijkheden zijn er nu?
Dan wordt het antwoord natuurlijk

$$\binom{130}{30}\cdot\binom{100}{50}.$$

Zo eenvoudig en ik dacht dat het goed was.
Tot mijn collega Frank zich ging bijscholen tot eerstegraads docent en op zijn opleiding iets anders leerde.
Het antwoord bij vraag 1 is het antwoord op de vraag: hoeveel mogelijkheden zijn er om de leerlingen over drie bussen te verdelen als er de bussen zijn: bus 30, bus 49 en bus 51.

Het antwoord $\binom{130}{30}\cdot\binom{100}{50}$

is het antwoord op de vraag: hoeveel mogelijkheden zijn er om de leerlingen over drie bussen te verdelen als er de bussen zijn: bus 30, bus 50a en bus 50b.
Maar dat was de vraag niet. De leerlingen op de lijst voor bus 50a en die voor bus 50b kun je verwisselen zonder dat het een andere groepsindeling wordt. Het antwoord moet dus zijn:

$\binom{130}{30}\cdot\binom{100}{50}:2\cdot$ Zoiets kwam ik ook tegen in klas 4 bij de vraag:[1] Zes leerlingen moeten in tweetallen een scheikundeproef uitvoeren. Vraag 3: Bereken op hoeveel manieren ze in drie tweetallen kunnen worden verdeeld. Het antwoordenboek komt op 90 manieren en dat is

$$\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}.$$

Maar dit is het aantal mogelijkheden om de leerlingen te plaatsen in groep 1, groep 2 en groep 3. Ook deze drie groepen kun je verwisselen en daarom moet het antwoord op vraag 3 zijn

$$\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}:3!=15\cdot$$

Hebben de bussen of groepen een nummer, dan moet je níet nog eens delen.
Is de volgorde van de bussen of groepen niet belangrijk, dan moet je wél delen.

Het volgende heeft er niets mee te maken. Maar toch...
Je hebt twee witte en drie rode ballen en je trekt met terugleggen twee ballen.
Bereken de P(eerst wit, dan rood). Het antwoord is dan $\frac{2}{5}.\frac{3}{5}\cdot$ Is de volgorde van de kleuren níet belangrijk, dan is het antwoord P(wit en rood) = $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot 2$ en moet je nu niet delen maar vermenigvuldigen.

Iets heel anders is het volgende: De gemoederen bij mij en mijn collega's worden al jaren beziggehouden met een vraag uit *Moderne Wiskunde*.[2]

Ik heb een stapel van twaalf bekertjes die ik in zes verschillende kleuren wil kleuren waarbij elke kleur twee keer voorkomt. Twee opeenvolgende bekertjes mogen niet dezelfde kleur krijgen.
Hoeveel mogelijkheden zijn er?



Ik denk dat we er uit zijn, maar denk er de komende vakantie eerst eens zelf over na en mail mij je oplossing! Wiskunde blijft toch echt boeiend!
Ik leer nog elke dag bij.

Noten

[1] *Moderne Wiskunde A/C* vwo 4 Hoofdstuk 1 Systematisch tellen: opgave 6b
[2] *Moderne Wiskunde A/C* vwo 4 Hoofdstuk 1 Systematisch tellen: opgave 43

Over de auteur

Simon Biesheuvel is docent aan het Willem de Zwijger College in Bussum.
E-mailadres: *s.biesheuvel@wdz.nl*

VERSCHENEN

HET BEST VERKOCHTE BOEK OOIT (MET DEZE TITEL)



Titel: Het best verkochte boek ooit (met deze titel)
Ondertitel: Hoe cijfers ons leiden, verleiden en misleiden
Auteur: Sanne Blauw
Uitgever: De Correspondent BV (2018)
ISBN: 978-90-8282-164-2
Prijs: € 18,00 (208 pagina's; paperback)

Van de uitgever:
Van rapportcijfers tot je pensioenleeftijd, van het weerbericht tot verkiezingsuitslagen: overal bepalen cijfers hoe ons leven eruitziet. Maar meten is mensenwerk, dus cijfers zijn niet waardenvrij. Dat lijken politici, bedrijven, media maar al te vaak te vergeten – of juist in te zetten voor eigen gewin. En wij, cijferconsumenten, zijn ook niet onschuldig. We laten ons maar al te graag verleiden als de cijfers zeggen wat we willen geloven. Daarom schreef journalist en econometrist Sanne Blauw *Het bestverkochte boek ooit (met deze titel)*.
Met dit boek wil ze cijfers weer op hun plek zetten. Niet op een voetstuk, niet bij het vuilnis, maar waar ze horen: naast de woorden. 'Onmisbaar voor wie weleens cijfers tegenkomt – voor iedereen dus,' aldus Ionica Smeets, hoogleraar wetenschapscommunicatie.

50 JAAR C¿TO, EEN HALVE EEUW WISKUNDE-EXAMENS?

Irene van Stiphout
Paul van der Molen
Melanie Steentjes

DEEL 3

In september 2018 bestond Cito 50 jaar. In het derde artikel over de rol van Cito bij de wiskunde-examens, bespreken Irene van Stiphout, Paul van der Molen en Melanie Steentjes de ontwikkelingen rondom digitale toetsen.



Inleiding

Lange tijd was de enige mogelijkheid om wiskunde te toetsen een toets met pen en papier. In de loop der jaren is daar verandering in gekomen. In dit artikel duiken we in de digitale geschiedenis van Cito. Paul van der Molen beschrijft zijn ervaringen met Compex-examens in het begin van deze eeuw, waar de computer wel werd gebruikt maar de toets nog op papier was. Daarna vertelt Melanie Steentjes over de digitale examens in het vmbo, waar leerlingen de antwoorden inclusief berekeningen intypen maar die nog wel door een docent worden nagekeken. Tot slot beschrijft Irene van Stiphout de Diagnostische Tussentijdse Toets die helemaal digitaal is, van vragen tot en met beoordeling door de computer.

Compex-examens

Begin deze eeuw was er een roep om binnen de examens meer te doen met de toegenomen mogelijkheden van de techniek. Bij wiskunde betekende dat meer dan alleen de grafische rekenmachine. Bij natuurkunde, biologie en wiskunde A vwo ging men de uitdaging aan. Er werd een examenvorm bedacht waarbij 2/3 van de examentijd aan reguliere opgaven werd besteed en 1/3 aan opgaven die met de computer gemaakt moesten worden. De leerlingen kregen de vragen op papier en schreven de antwoorden ook op papier. De informatie en tools werden via de computer aangeboden. Als een school minder computers dan leerlingen had, kon middels een roulatieschema het hele examen toch redelijk binnen de examentijd afgenomen worden. Het kunnen toepassen van wiskundig denken in praktische situaties leidde ertoe dat werd gekozen voor wiskunde A1 en wiskunde A1,2 en niet voor wiskunde B. In de jaren 2003 – 2005 werden de eerste opgaven ontwikkeld en op scholen uitgeprobeerd. De manier waarop de informatie op de computer werd getoond kon grofweg in twee categorieën worden ingedeeld: applicaties/simulaties en Excel-databestanden. De discussie over de platform-onafhankelijkheid dook meteen op.
Ook moest een lijst met Excel-vaardigheden duidelijk maken welke functies de leerlingen dienden te beheersen om de opgaven goed te kunnen maken. Maar in die tijd was het belangrijkste doel van de examenmakers bij Cito vooral om opgaven te bedenken die meerwaarde hadden: 'Welke vormen van wiskundig denken vinden wiskundedocenten belangrijk, maar zijn op papier niet (zo goed) toetsbaar en met de computer erbij wel?'
In 2006 waren de eerste compex-examens een feit. Scholen konden zich vrij inschrijven voor dit examen en enkele honderden leerlingen maakten het. In de jaren daarna nam het aantal deelnemende leerlingen langzaam af. Na een evaluatie in 2008 met alle stakeholders (inclusief leerlingen) werd besloten om met de wiskunde compex-examens te stoppen. Er waren uiteenlopende redenen waarom. Leerlingen vonden het lastig om zich in de korte tijd de complexe contexten eigen te maken. Docenten vonden het zonde van de tijd om Excel-functies te behandelen in de les. Het Cevo (wat nu CvTE is) zat met de platform-onafhankelijkheid in de maag. En bij Cito ervaarde men dat het ontwikkelen van deze opgaven veel tijd kostte. Toch heeft het project een paar juweeltjes opgeleverd. Een voorbeeld hiervan is de opgave over de presidentsverkiezingen in Amerika. Leerlingen kregen in een Excel-bestand een lijst met alle staten van de USA met daarbij het aantal stemgerechtigden en het aantal kiesmannen. Met een beetje hulp konden de leerlingen uitrekenen wat het minimale percentage van de stemmen was waarmee je tot president verkozen kon worden. De werkwijze was interessant en het antwoord bizar: 22%!

Digitale examens vmbo

In 2018 maakte 99% van de vmbo bb-leerlingen hun CE wiskunde digitaal. Bij kb was dat 93%. Dat zijn enorme aantallen. Bij deze digitale examens moeten leerlingen hun berekening en antwoord invoeren in de computer. De docent kijkt vervolgens de open vragen na.
Het besluit om een pilot digitaal examineren op te zetten voor alle algemene vakken van vmbo bb is zo'n vijftien

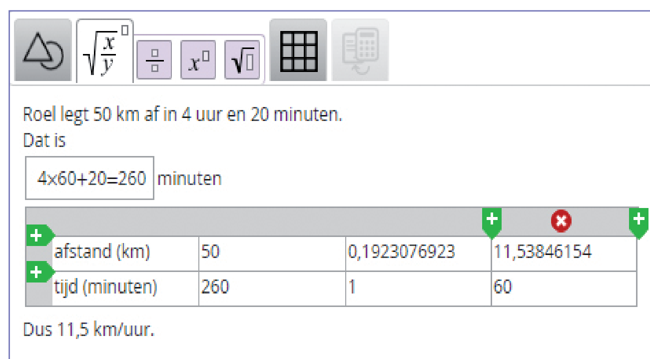
jaar geleden door het toenmalige Cevo genomen. Vooral bij wiskunde en nask1 bleek digitaal examineren niet eenvoudig. Al direct aan het begin werd in samenspraak met de vaststellingscommissie van het CvTE besloten zeker niet te veel gesloten vragen te stellen in het examen wiskunde. Dat stond zo ver af van de heersende praktijk binnen het vmbo, dat het geen valide examen zou opleveren. Dit gaf wel problemen, want hoe moesten leerlingen hun berekening kwijt? Zo konden leerlingen in de beginperiode de exponenten 2 en 3 alleen invoeren door een bepaalde Alt-toetscombinatie. Dit werd wel in de tekst uitgelegd, maar het behoeft weinig toelichting dat dit afbreuk doet aan de validiteit van het examen. We willen immers niet de computer- of leesvaardigheden van een leerling toetsen, maar zijn wiskundekennis en vaardigheden.[1]

Computerrekenmachine

In 2010 werd er ook een pilot gestart bij kb met digitale examens. Omdat bij kb de berekeningen ingewikkelder zijn dan bij bb (denk aan de Stelling van Pythagoras en goniometrie) werd het probleem nijpender.
Met een externe software ontwikkelaar ontwierp Cito voor het wiskunde kb-examen de zogenaamde computerrekenmachine. Leerlingen konden met deze computerrekenmachine berekeningen uitvoeren en zowel berekening als antwoord met één druk op de knop opslaan in het uitvoervenster, zodat ze niet hoefden te goochelen met kwadraattekens of worteltekens in een formule-editor.
De computerrekenmachine maakte een hele natuurlijke manier van het opschrijven van hun berekening mogelijk die, vergeleken met papier, een stap voorwaarts was: leerlingen hoefden hun berekening van hun rekenmachine niet meer over te schrijven.

Toolbox

De computerrekenmachine bleek een stap in de goede richting, maar we waren er nog niet. Leerlingen willen bijvoorbeeld een verhoudingstabel of een Pythagorastabel maken of een goniometrische formule opschrijven of een schets van een driehoek maken. Deze dingen schreven leerlingen nu op kladpapier, maar dit kon niet meegenomen worden in de beoordeling en dus misten docenten soms cruciale informatie. Om hieraan tegemoet te komen is op initiatief van Cito de toolbox ontwikkeld die in 2012 in een pilot bij wiskunde kb is getest.[2] In de toolbox hebben leerlingen verschillende mogelijkheden, zie figuur 1. Ze kunnen gewoon typen en tekens invoeren, zoals een kwadraatteken of een euroteken. Ze kunnen hun berekeningen (ingetoetst op de rekenmachine) plakken in de toolbox. Ze kunnen een tabel invoeren, kolommen of rijen toevoegen of verwijderen en tekst in de tabel zetten. Ze kunnen een schets van een driehoek maken en daar waarden bij zetten. Er is een formuleblad met meetkundige formules, die geplakt kunnen worden in de toolbox. Ook is er een kleine formule-editor beschikbaar.

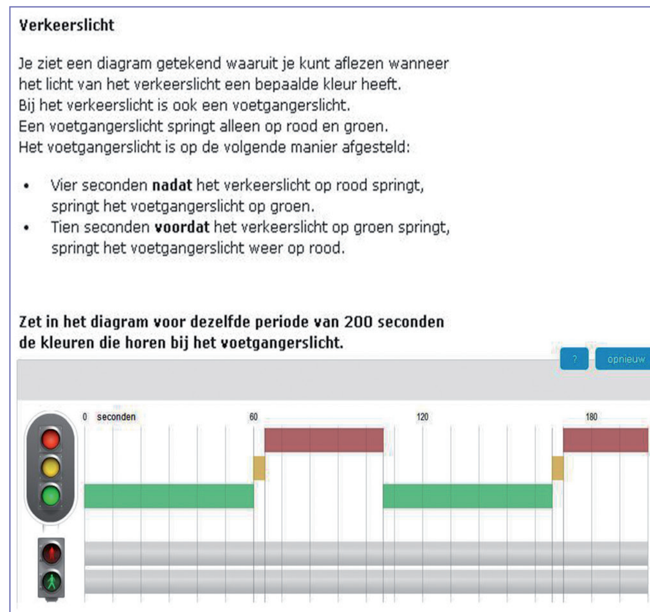


figuur 1 De toolbox

Vanaf 2013 is de toolbox ingezet bij de digitale examens wiskunde kb. Met ingang van dit jaar is er een nieuwe variant van de toolbox gebruikt: de toolbox is nagemaakt en geïntegreerd in Facet, de afnameomgeving die in opdracht van CvTE is ontwikkeld. Ook is een vereenvoudigde versie, na een succesvolle pilot in 2017, dit jaar ingezet bij wiskunde bb. Ook bij nask1 bb en kb wordt inmiddels gewerkt met de toolbox.

Andere applicaties

Veel vragen maken gebruik van de toolbox. Er worden ook andere applicaties binnen het digitale examen gebruikt, die worden gebouwd door de afdeling softwareontwikkeling van Cito. Zie bijvoorbeeld figuur 2.



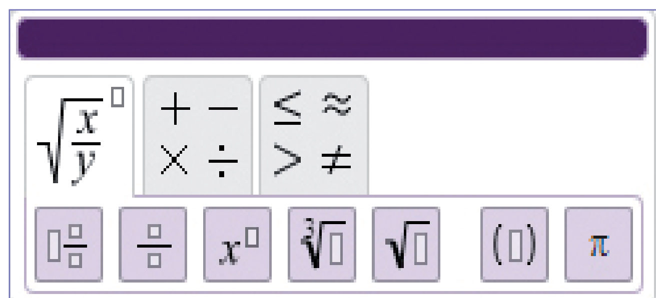
figuur 2 Applicatie binnen het digitale examen

Er is, in samenwerking met nask1, door dezelfde afdeling een grafiekentool ontwikkeld waarmee leerlingen punten in een assenstelsel kunnen zetten en een grafiek kunnen tekenen. Ook wordt er binnen Cito op dit moment gewerkt aan een meetkundetool, zodat het mogelijk wordt punten, lijnen en cirkels in afbeeldingen te tekenen. Als je een indruk wilt krijgen van het digitale examen wiskunde (of van andere digitale examens), raden wij je aan om

een kijkje te nemen op *oefenen.facet.onl*. Hier vind je de examens en kun je zelf uitproberen hoe de verschillende applicaties werken.

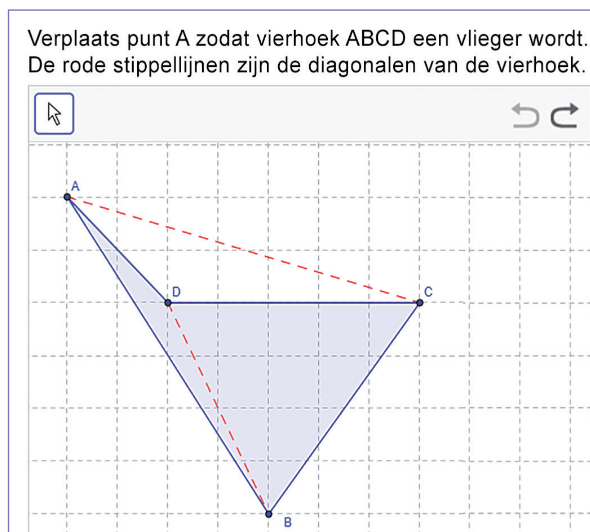
DDT

In de periode 2011-2017 heeft Cito gewerkt aan de ontwikkeling van de Diagnostische Tussentijdse Toets (DTT). Deze toets was helemaal digitaal: de opgaven werden op de computer getoond, leerlingen voerden een antwoord in, waarna de computer de antwoorden automatisch beoordeelde. De DTT was bedoeld voor de kernvakken Nederlands, Engels en wiskunde en werd aan het einde van de onderbouw afgenomen. Het idee was dat deze toets leerlingen, ouders, docenten en de school inzicht zou geven in hoeverre leerlingen op de goede weg zaten richting het eindexamen. Een verplichting van de toets is er niet van gekomen. In de loop van 2017 is de DTT overgedragen van Cito naar marktpartijen.
In de DTT waren verschillende vraagtypen mogelijk. Bij vragen waar leerlingen als antwoord een formule moesten intypen, kwam er een keuzescherm tevoorschijn, zie figuur 3. In andere vraagtypen konden leerlingen slepen met formules of plaatjes om ze te categoriseren. Ook waren er vragen waarin leerlingen met de muis een bepaald gebied konden aanklikken. Al deze vraagtypen konden automatisch beoordeeld worden via correctieregels die in de software waren opgenomen.



figuur 3

In de loop van de tijd werd duidelijk dat bepaalde vragen niet gesteld konden worden. Dit gold bijvoorbeeld voor het tekenen van grafieken en meetkundige figuren. In de loop van 2016 kwamen er daarom items waarin een scherm met GeoGebra was opgenomen. Door bepaalde functionaliteiten van GeoGebra uit te zetten, kon een overzichtelijk scherm getoond worden aan leerlingen waarin ze een paar knoppen hadden om de vraag te kunnen beantwoorden. Dit ging bijvoorbeeld om het verslepen van punten of het tekenen van figuren met bepaalde eigenschappen, zie figuur 4. In deze vraag kunnen leerlingen alleen punt *A* verslepen. Als leerlingen dit doen, bewegen de lijnstukken *AB*, *AC* en *AD* mee. Voor de automatische beoordeling werd in GeoGebra een Booleaanse variabele gemaakt van het antwoord die 1 werd bij een juist antwoord en 0 bij een onjuist antwoord.



figuur 4 Aangepast GeoGebra-scherm

Een andere wens was om deelscores te kunnen toekennen. Dit bleek technisch heel ingewikkeld, maar bij sommige vragen toch mogelijk. Zo was er een vraag waarin vanuit de context een vergelijking moest worden opgesteld en die vergelijking vervolgens moest worden opgelost. Een leerling die beide stappen goed had, kreeg twee punten. Als een leerling een foute vergelijking bij de context had, maar die vergelijking wel juist had opgelost, of de juiste vergelijking had maar die verkeerd had opgelost, was dat een deelscore waard. Tijdens de ontwikkeling van de DTT zijn grote stappen gezet in het digitaal toetsen van wiskunde. We vertrouwen erop deze ervaringen in de toekomst te kunnen gebruiken.

Hoe verder?

De mogelijkheden van digitale toetsing nemen snel toe, ook al is nog niet alles mogelijk. Wiskundige redeneringen automatisch laten beoordelen bijvoorbeeld, hoort nog niet tot de mogelijkheden. De wereld verandert echter snel waardoor wat vandaag niet kan, morgen ineens een mogelijkheid kan zijn. Ondertussen moet het doel niet uit het oog worden verloren. Uiteindelijk gaat het erom dat leerlingen kunnen laten zien dat ze de juiste wiskundige ideeën en vaardigheden in huis hebben. Dit laatste blijft een uitdaging voor iedereen met hart voor het wiskundeonderwijs.

Noten

[1] Zie ook *Euclides* 84/2, oktober 2008
[2] Zie ook *Euclides* 88/1, september 2012

Over de auteurs

Paul van der Molen is manager onderzoek en normering bij Cito. Emailadres: *Paul.vanderMolen@cito.nl*
Melanie Steentjes en Irene van Stiphout zijn toetsdeskundigen bij Cito. Emailadressen: *Melanie.Steentjes@cito.nl* en *Irene.vanStiphout@cito.nl*

BOEKBESPREKING

WISKUNDE DE BASIS DEEL 1



Christaan Boudri



Titel: Wiskunde de basis
Ondertitel: deel 1
Auteur: Jaap Grasmeijer
Uitgever: Noordhoff Uitgevers B.V., Groningen (2017)
ISBN: 978-90-0187-817-7, 288 pagina's (softcover)
Prijs: € 40,50

Basis

Met het boek van Jaap Grasmeijer is op het eerste gezicht iets vreemds aan de hand. De titel: *Wiskunde de basis deel 1* doet denken aan heel eenvoudige wiskunde. Eerder heeft Jaap samen met Douwe-Jan Douwes het zeer succesvolle boekje *Basisvaardigheden Wiskunde HTO* geschreven. Dat boekje was bedoeld als opfris- en bijspijkercursus, en het wordt ook gebruikt in doorstroomcursussen in het mbo. *De basis deel 1* zou dan de opvolger hiervan kunnen zijn, en dan nog maar het eerste deel ervan. Maar dat wordt hier niet bedoeld: het is echt gericht op de wiskunde van de propedeuse van het technisch hbo, en is niet bedoeld als opvolger voor *Basisvaardigheden*. En waarom 'deel 1'? Het boek is tamelijk compleet voor wat betreft de propedeuse-wiskunde, inclusief calculus, vectorrekening en complexe getallen. Mogelijk ligt de reden erin dat 'basis' hier niet bedoeld is in de betekenis van 'fundament van de hbo-wiskunde' (waarna het echte werk kan beginnen), maar van 'fundament van de hbo-techniek'. Met andere woorden: het drukt uit dat wiskunde de basis is van de techniek, en misschien is dat ook wel precies waar in het hoger technisch beroepsonderwijs behoefte aan bestaat. Dit is goed te rijmen met zijn eigen achtergrond: als docent aan techniekopleidingen (vooral werktuigbouw en elektrotechniek) heeft de auteur van nabij meegemaakt hoe de laatste twintig jaar het niveau van zowel instromende studenten als het wiskundecurriculum daalden. Hij merkte met name hoe studenten zich steeds meer beperkten tot het toepassen van trucjes. Zelf wiskundige (toegepaste wiskunde, Vrije Universiteit) en wiskundedocent (1e-graads, Universiteit van Amsterdam) heeft hij zijn ervaringen omgezet in eerst eigen lesmateriaal, en vervolgens dit boek.

Wiskundige basis van techniek

Wat is dan die wiskundige basis van de techniek? Waar heeft het technisch beroepsonderwijs – en in het bijzonder de techniekstudent - behoefte aan? Het gaat hem natuurlijk om het leren toepassen van wiskunde. Alleen kan dit 'leren' op twee tegengestelde manieren worden gelezen, die met elkaar op gespannen voet staan: 1. Wiskunde leren toepassen. 2. Wiskunde leren toepassen. Te vaak wordt in het hbo gedacht dat het eerste kan worden overgeslagen en dat het leren van wiskunde vanzelf gaat door het toe te passen. Hierover moet Freudenthal hebben gezegd dat je door toegepaste wiskunde niet leert de wiskunde toe te passen (een citaat dat ik helaas niet kan terugvinden – welke lezer helpt mij?). Hierover gaat dit boek niet. Het richt zich traditioneel op het leren van wiskunde, maar voegt hier een nieuw element aan toe dat in veel leerboeken ontbreekt, namelijk een aangepast niveau. Hierin ligt de grote kracht van dit boek.
De hbo-student wordt op zijn eigen niveau aangesproken. Niet gemakzuchtig met alleen regeltjes, maar ook niet met abstracte bewijzen en formeel taalgebruik.

Inzicht op hbo-niveau

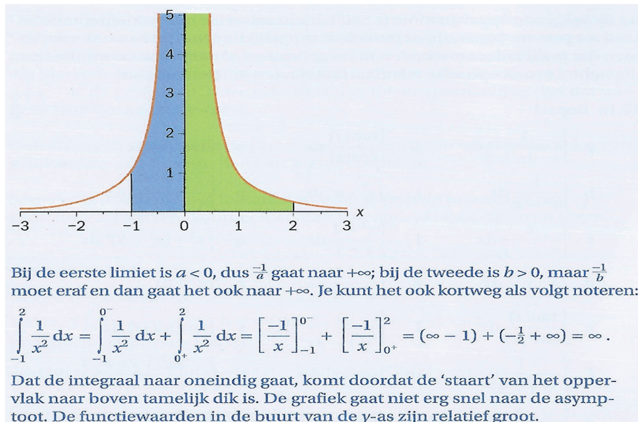
Het zou niet gezegd hoeven te worden, maar het lijkt in leerboeken vaak over het hoofd te worden gezien dat hbo-studenten vaak murw raken door een te abstracte of een te gedetailleerde aanpak. 'Begrijpen' en 'bewijzen' hoeft echter niet beperkt te zijn tot een axiomatische abstracte bewijsvoering. Vaak komt inzicht directer en intuïtiever tot stand door een beroep te doen op visualisering en generalisatie, al heeft dit weinig met een streng bewijs te maken.
Een mooi voorbeeld is de introductie van de afgeleide functie. Meestal wordt dit geïntroduceerd met behulp van de methode van Weierstrass (limietbegrip, differentiequotiënt, differentiaalquotiënt). Grasmeijer begint met een visualisatie van de hellingfunctie, waardoor er een intuïtief inzicht in de afgeleide functie ontstaat. Daarna pas introduceert hij de afgeleide waarde met de methode van Weierstrass (overigens zonder deze naam te noemen). Leuk is, dat hij dan aardig wat afleidingen van afgeleide functies laat zien, zoals van e^x en diverse vormen van x^n. In het hoofdstuk 'Integreren' is een mooi voorbeeld te vinden van hoe Grasmeijer zaken uitlegt

op een hbo-manier: de berekening van de oneigenlijke integraal $\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^2} dx$.

Hij legt eerst uit hoe je al aan het minteken kunt zien dat de rechttoe-rechtaan-oplossing

$$\left[\frac{-1}{x}\right]_{-1}^{2} = \frac{-1}{2} - \frac{-1}{-1} = -1\tfrac{1}{2}$$ niet kan kloppen:

Uit de grafiek blijkt dat het oppervlak in zijn geheel boven de x-as ligt en bovendien veel groter is dan $1\frac{1}{2}$. Hoe dan wel? Zie hiervoor de toelichting in figuur 1.



Bij de eerste limiet is $a < 0$, dus $\frac{-1}{a}$ gaat naar $+\infty$; bij de tweede is $b > 0$, maar $\frac{-1}{b}$ moet eraf en dan gaat het ook naar $+\infty$. Je kunt het ook kortweg als volgt noteren:

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^2} dx = \int_{-1}^{0^-} \frac{1}{x^2} dx + \int_{0^+}^{2} \frac{1}{x^2} dx = \left[\frac{-1}{x}\right]_{-1}^{0^-} + \left[\frac{-1}{x}\right]_{0^+}^{2} = (\infty - 1) + (-\tfrac{1}{2} + \infty) = \infty .$$

Dat de integraal naar oneindig gaat, komt doordat de 'staart' van het oppervlak naar boven tamelijk dik is. De grafiek gaat niet erg snel naar de asymptoot. De functiewaarden in de buurt van de y-as zijn relatief groot.

figuur 1 Wiskunde de basis deel 1, p. 196

Gaat dit altijd goed? Naar mijn idee is Grasmeijer hier het best in geslaagd in de eerste negen hoofdstukken (tot en met 'Machtreeksen'). Een misser zie ik wel bij de behandeling van het functiebegrip. Het verschil met verbanden wordt niet expliciet gemaakt, en ook komen basisbegrippen als bereik en domein niet aan bod. Functieanalyse ontbreekt dan ook in het boek.

Integreren

Ook zou ik vanaf het hoofdstuk 'Integreren' zelf toch wat andere accenten leggen. Een voorbeeld: de introductie van de Riemannsom bij integreren is wel erg kort; ondersom en bovensom komen niet aan de orde, evenmin als toepassing bij integratie van meetwaarden (waarin de staafjes niet allemaal even breed zijn). Hij geeft wel voldoende aandacht aan de fysische versus wiskundige interpretatie van het oppervlakte onder een grafiek, maar het opstellen van een integraal door sommatie ontbreekt vrijwel geheel. Terwijl dit in het modelleren van technische problemen een lastig te verwerven vaardigheid is. Hij behandelt wel toepassingen, maar deze zijn meer toegesneden op de elektrotechniek dan op werktuigbouwkunde. Bij de toepassingen in de dynamica (p. 191) worden bovendien niet de volledige bewegingsvergelijkingen behandeld, maar alleen de vereenvoudigde 'havo'-formules, zoals die voor de valbeweging:

$$s(t) = \int_0^t 9{,}81 \cdot t \, dt = 9{,}81 \cdot \tfrac{1}{2} t^2 .$$

Ook is voor toepassing in de dynamica het 'spelen' met differentialen, zoals $ds = v dt$ een belangrijk onderdeel, dat hier jammer genoeg ontbreekt.

Complexe getallen

Een onderdeel waar Grasmeier wat mij betreft niet in zijn opzet is geslaagd, is complexe getallen. Hier blijft de noodzaak voor de invoering schimmig. Het argument dat je met imaginaire getallen ook een vergelijking als $x^2 = -3$ kunt oplossen, maakt de invoering van imaginaire getallen nog niet zinvol. Want waarom zou je iets bedenken om iets zinloos uit te voeren, zo zal een hbo'er denken. Wat volgt, is dan een uitgebreide sessie 'zinloze berekeningen' (volgens diezelfde hbo'er). Voor elektro-studenten wacht er aan het eind wel een toepassing in de vorm van de optelling van wisselspanningssignalen, maar sterk is het allemaal niet. De bewering dat de som van twee goniometrische functies met gelijke frequenties eenvoudiger is te schrijven als één goniometrische functie door complex te rekenen, wordt bijvoorbeeld niet gedekt door de gegeven voorbeelden. 'Laat mij maar lekker met echte getallen werken', hoor ik de hbo'er al zeggen.

Conclusie

Een vraag is misschien nog, of in deze tijd waarin veel uitgevers volledig digitale methodes introduceren – zoals *Wiskunde voor Technici* van concurrent Boom, en de digitale platformen van *Sowiso*, *DWO* en *Aleks* – er nog wel ruimte is voor een vrij rechttoe-rechtaan-methode met wat internetondersteuning. Het antwoord hierop zal de komende jaren moeten blijken. Een belangrijke meerwaarde van een boek is in elk geval, zo geven de studenten in mijn klassen vaak aan, de overzichtelijkheid. En daar voldoet dit boek uitstekend aan.

Samenvattend: Het boek is overzichtelijk (mede door een functioneel kleurgebruik), is prettig leesbaar, en geeft veel oefenmateriaal, aangevuld met testen en uitwerkingen op de website. Het geeft een basis voor toepassing, hoewel het zelf weinig toepassingen bevat. De grote kracht van het boek is dat het didactiek hanteert op het niveau van de huidige hbo-student. Het onderkent dat toepassing pas mogelijk is op basis van inzicht en oefening, maar dat dit wel op het niveau van de student moet worden toegesneden. Het boek is daardoor geschikt als lesmateriaal en als inspiratiebron om in de eigen lessen de studenten op een hoger niveau van inzicht te brengen.

Over de auteur

Christiaan Boudri is werktuigbouwkundig ingenieur en eerstegraads wiskundedocent. Hij is werkzaam als docent aan het Instituut Engineering van de Hogeschool van Arnhem en Nijmegen. Hij is voorzitter van de NVvW-werkgroep mbo-hbo.
E-mailadres: *christiaan.boudri@han.nl*

BOEKBESPREKING

KANSREKENING VAN ALLEDAG, EEN WERELD VOL VERRASSINGEN



Jeanine Daems



Titel: Kansrekening van Alledag, een Wereld vol Verrassingen
Ondertitel: Epsilon 86
Auteur: Henk Tijms
Uitgever: Epsilon Uitgaven, Amsterdam (2016)
ISBN: 978-90-5041-158-5, 76 pagina's (softcover)
Prijs: € 12,00

'Kansrekening is één van de meest fascinerende takken van de wiskunde en spreekt vrijwel iedereen aan door de directe link met het dagelijks leven dat ons bijna elke dag weer confronteert met situaties waarin kansen een grote rol spelen,' schrijft Henk Tijms in het voorwoord bij dit boekje.
In dit boek staan zestien hoofdstukken die gebaseerd zijn op de populairwetenschappelijke columns die Tijms eerder schreef. Het is dus niet een leerboek, het is ook niet echt één geheel. In elk hoofdstuk bespreekt Tijms een praktisch probleem waarin kansrekening een grote rol speelt.

Toeval of niet?

Sommige hoofdstukken vond ik heel goed en duidelijk, bijvoorbeeld 'Toevalligheden en onmogelijkheden'. Tijms vertelt over een bericht uit de Engelse krant *The Sun*, die in grote letters het opmerkelijke nieuws bracht dat het derde kind van een echtpaar om 7.43 uur geboren was, precies op hetzelfde tijdstip als de twee eerdere kinderen. De krant rekende vervolgens foutief uit wat die kans is: 1 op de 720 × 720 × 720, terwijl dat natuurlijk 1 op de 1 × 720 × 720 moet zijn. ('Uitgaande van de wat wonderlijke veronderstelling van een tijdsvenster van 12 uur per dag voor geboortes,' schrijft Tijms. Blijkbaar vatte de krant 7.43 a.m. en 7.43 p.m. op als hetzelfde tijdstip.) Maar dat is niet het belangrijkste hier, want, schrijft Tijms: 'veel van dergelijke toevallig lijkende gebeurtenissen zijn helemaal niet zo toevallig als je er vanuit het juiste perspectief naar kijkt. Er worden tenslotte in nogal veel gezinnen kinderen geboren, dus de kans is heel groot dat een dergelijke situatie een keer zal optreden.' Tijms licht dit verder toe door te vertellen over loterijen: in 1986 won een dame in de VS binnen vier maanden twee keer de jackpot in een bepaalde loterij. De kans dat iemand twee keer de jackpot zou winnen in die loterij was 1 op de 17 biljoen. Maar ja, schrijft Tijms, er zijn erg veel loterijen op de wereld waaraan nogal veel mensen wekelijks deelnemen. 'Onder realistische aannames kan met eenvoudige kansrekening aangetoond worden dat met een kans dicht bij 1 er ergens onder die miljoenen en miljoenen lottospelers iemand zal zijn die in een kort tijdsbestek twee of meer keer de jackpot zal winnen' aldus Tijms.

Wat ik persoonlijk jammer vind, is dat hij die berekening vervolgens niet laat zien. Ik snap wel dat dit boek niet bedoeld is als leerboek, maar er staan situaties in waarbij ik als lezer eigenlijk wel wil weten hoe die berekeningen dan precies gaan. Het niet geven van die berekeningen zorgt er aan de ene kant voor dat het boek toegankelijk is, want er staan veel interessante verhalen in zonder veel technische details, aan de andere kant kan ik als lezer daardoor soms niet echt meedenken met de auteur en komen resultaten best vaak uit de lucht vallen.

Bovendien schuwt Tijms formules niet, zo zien we in het hoofdstuk 'De zeven mooiste formules in de kansrekening'. Interessante formules, inderdaad, en Tijms legt uit waar ze voor zijn, geeft wat context, vult voorbeelden in en probeert de intuïtie aan te geven die bij zo'n formule hoort. Maar waarom zo'n formule nou eigenlijk klopt, komen we niet te weten. Dat is waarschijnlijk ook te veel gevraagd in zo'n boek voor een tamelijk breed publiek, maar de meerwaarde van het opsommen van die formules zie ik persoonlijk dan niet zo.

Voorwaardelijke kansen

Interessant is het hoofdstuk 'Manipulatie in de Champions League?' Het gaat over hoe je met kansrekening kunt

bepalen wat de kans is dat een voetballoting doorgestoken kaart is gegeven de uitkomst van de loting. Om die kans te bepalen gebruik je de formule van Bayes:

$$P(A|B)=\frac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(B)}$$

, die het verband aangeeft tussen de voorwaardelijke kansen $P(A|B)$ en $P(B|A)$. Deze kansen, schrijft Tijms, worden nog wel eens verward in praktische situaties. Een voorbeeld dat hij noemt is de situatie waarin een misdrijf gepleegd is en bloed wordt aangetroffen dat alleen van de dader kan zijn. Dat bloedtype komt slechts bij 0,001% van de bevolking voor. In de databestanden van de politie vinden ze iemand met dit bloedtype. Nu geldt dus dat
P(*hetzelfde bloedtype* | *onschuldig*) = 0,001%, maar het zou hier moeten gaan om de kans *P*(*onschuldig* | *hetzelfde bloedtype*) en dat is een heel ander verhaal. Tijms roept op om meer aandacht te besteden aan basiskennis van Bayesiaans denken, ook al op de middelbare school, omdat dergelijke overwegingen zeer belangrijk zijn in de medische wereld en de wereld van de rechtspraak.

Nieuwsgierig

Wat leuk is aan dit boek is dus de veelheid aan situaties waarin kansrekening een belangrijke rol speelt. Het gaat over loterijen, over hoe moeilijk mensen een echt willekeurige rij nullen en enen kunnen faken, over de waan van de gokker die denkt dat als een balletje minder vaak dan gemiddeld op rood gevallen is, de gebeurtenis rood daarna wel vaker zal optreden, enzovoort.
Aan het taalgebruik in het boek heb ik me soms gestoord, er staan te veel slordigheden in. Sowieso het overbodige hoofdlettergebruik in de hoofdstuktitels en het overmatig gebruik van apostrofs en spaties (Euler's getal, de gokker's formule, Markov keten, Facebook vrienden), maar ook lopen zinnen vaak niet helemaal lekker, ze hebben bijvoorbeeld een woord te veel of verkeerde interpunctie.
Wat ik hierboven als nadeel beschreef, namelijk dat veel formules toch een beetje uit de lucht komen vallen, kan natuurlijk ook positief worden geïnterpreteerd: blijkbaar wil ik als lezer wel weten hoe het dan zit. Daarvoor is dit een mooi boekje: even proeven aan toepassingen van de kansrekening, zien in hoeveel situaties je die eigenlijk kunt gebruiken, zien dat toevalligheden soms heel goed verklaarbaar zijn. Daarom kan het voor leerlingen die een profielwerkstuk willen gaan maken in deze richting een mooie opstap zijn, om nieuwsgierig te worden naar hoe het dan echt zit, en daarna verder op onderzoek uit te gaan.

Over de auteur

Jeanine Daems is lerarenopleider wiskunde aan de Hogeschool Utrecht. E-mailadres: *jeanine.daems@hu.nl*

VASTGEROEST

KERST IN DE WISKUNDELES

Ab van der Roest

De laatste les voor de kerstvakantie. Voor iedereen die er tegenop ziet: die les zou zomaar eens meer indruk kunnen maken dan je denkt. Een didactisch kerstverhaal van Ab van der Roest.

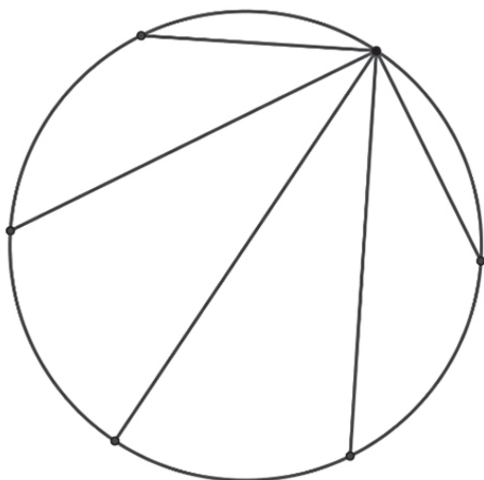
De laatste lessen voor een vakantie vind ik altijd de moeilijkste lessen die ik moet geven. Met het woordje *moet* wil ik benadrukken dat het echt anders is dan gewoon. Bijna alle lessen geef ik met vreugde, maar die lessen! Het gezeur van de leerlingen om een film te kijken, of iets 'leuks' te doen. Moet je nagaan. Het hele jaar doen we leuke wiskunde en dan de les voor de vakantie iets leuks doen!

Ik werk op een christelijke school en de dag voor de kerstvakantie worden er kerstvieringen georganiseerd. In het verleden mochten leerlingen na de viering naar huis, maar sinds onderwijstijd een erg belangrijk begrip is geworden, worden er na een viering gewoon weer lessen gegeven. Ik moest dus aan de bak in mijn vwo 4 klas wiskunde A. En dan iets leuks doen met leerlingen die alleen maar geïnteresseerd zijn in de vakantie. Mijn definitie van iets leuks doen is: verrassende wiskunde buiten het boek om. Dan moet je iets zoeken.



figuur 1 Davidster en ster van Salomo

In Israël zag ik bij een ruïne twee verrassende afbeeldingen, zie figuur 1. De linker is natuurlijk heel bekend: de Davidster of zoals we in de wiskunde zeggen de hexagoon. Maar er vlak naast lag een steen met een pentagram. De gids vertelde me dat het de ster van Salomo wordt genoemd.
Bij kerst denken we aan de geboorte van Jezus, die ook wel de blinkende morgenster wordt genoemd. Daarnaast kennen we waarschijnlijk allemaal het verhaal van de ster van Bethlehem. Dit was de reden waarom ik in mijn 'leuke' les iets over regelmatige sterren wilde doen.
Bij de Davidster tellen we zes lijnstukken, voor het gemak noem ik ze lijnen, en bij de ster van Salomo vijf. Dat is vanzelfsprekend als je bedenkt dat het een zeshoek en een vijfhoek is. Het aantal hoekpunten is respectievelijk zes en vijf.



figuur 2

We gaan dit modelleren door de punten op een cirkel te leggen en dan het maximale aantal lijnen te tellen, zie figuur 2.
Dit aantal kunnen we tellen door de lijnen uit de punten gewoon te tellen: 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15, of door iets slimmer te kiezen: zes punten met elk vijf lijnen geeft 30 lijnen. Maar omdat je ze dubbel telt moet je door twee delen; dus je krijgt dan ½ × 30 = 15 lijnen. Je kunt ook zeggen dat je voor elke lijn twee eindpunten nodig hebt en dat geeft dat je er steeds twee van de zes moet kiezen en dat kan op $\binom{6}{2}=15$ manieren.

Dan maken we de stap naar n punten op de cirkel. Het aantal lijnen wordt dan $\binom{n}{2}=\frac{1}{2}n(n+1)$.
Uiteraard ook de somrij $\sum_{k=1}^{n} k$, en uiteraard wordt het verhaal van de jonge Gauss dan ook verteld.
Een les waar de leerlingen behoorlijk actief kunnen zijn, maar waar ook niet te veel van hen wordt gevraagd.
De presentatie van de stof deed ik via het bord en ze mochten meeschrijven als ze wilden, maar moesten wel meedenken. De les verliep niet vlekkeloos en ik hield er geen kerstgevoel aan over.

Maar, toen ik twee jaar later wiskunde A moest geven aan 6 vwo, deed ik een belangrijke ontdekking. Een som uit het boek leek wel een beetje op het verhaal dat ik had gehouden op de laatste dag voor de vakantie. Dat wist ik niet, maar dat wist wel een jongen uit de groep, Guido, die in de vierde klas niet bepaald de makkelijkste leerling was. Hij zei: 'Mijnheer dat is precies hetzelfde als u toen deed met de sterren. Ik vond dat zo'n mooie les, kunnen we dat nog een keer doen?'

Over de auteur

Ab van der Roest is docent wiskunde aan het Ichthus College te Veenendaal.
E-mailadres: *rst@ichthuscollege.nl*

RODE EN GROENE HOEDEN

OLYMPIADEPUZZEL 94-3





Birgit van Dalen
Quintijn Puite

In deze jaargang vind je in nummers 1, 3, 5 en 7 van *Euclides* een olympiadepuzzel. Het niveau van de puzzel is vergelijkbaar met de eerste of tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. We moedigen je daarom aan om de puzzel ook met je klas te proberen: met enig doorzettingsvermogen zal een groepje leerlingen deze puzzel misschien ook wel kunnen oplossen.

Vijf *Euclides*-lezers zitten in een kring met allemaal een rode of groene hoed op. Ze weten niet van zichzelf welke kleur hoed ze op hebben. Ze zijn allemaal wel heel erg goed in logicapuzzels.

- Ben spreekt als eerste: 'Ik zie minstens één rode hoed.'
- Carla zegt daarna: 'Ik weet nu nog niet welke kleur mijn hoed heeft. Ik zie zelf minstens één groene hoed.'
- Frans zegt vervolgens: 'Ik weet nu nog niet welke kleur mijn hoed heeft. Ik zie zelf minstens twee rode hoeden.'
- Jos zegt daarna: 'Ik weet nu nog niet welke kleur mijn hoed heeft. Ik zie zelf minstens twee groene hoeden.'
- Monica besluit met: 'Dan weet ik nu dat mijn hoed dezelfde kleur heeft als die van Jos.'

Bepaal van alle vijf de *Euclides*-lezers welke kleur hoed zij op hebben.

Stuur je oplossingen uiterlijk 17 januari naar *euclides@wiskundeolympiade.nl*. We zien graag niet alleen het door jou gevonden antwoord, maar ook de uitwerking. Onder de inzenders met een juiste uitwerking verloten we een cadeaubon van € 20,–.

Terugblik puzzel 94-1

Voor de puzzel *Vierkanten en rechthoeken* hebben we 38 inzendingen ontvangen, waarvan heel wat van scholieren die door hun *Euclides*-lezende docent aan het werk zijn gezet. Diverse docenten hebben ons geschreven over het enthousiasme van hun leerlingen hierbij, heel leuk. Voor de oplossing van deze opgave waren er twee strategieën. De meeste mensen hebben letters ingevoerd voor de lange en korte zijde van de rechthoek en vervolgens relaties afgeleid uit het plaatje, om daarmee de zijde van de grote en kleine vierkanten te berekenen en vervolgens de oppervlakte van het gevraagde gebied. Anderen hebben echter direct met oppervlaktes geredeneerd. Een valkuil daarbij is dat er dan twee oplossingen uit lijken te komen, waarvan er slechts één bij het gegeven plaatje past. De andere oplossing heeft ook wel het juiste aantal rechthoeken en vierkanten, maar die liggen anders gerangschikt. Bij deze aanpak hoort het afschieten van deze tweede uitkomst dus ook nog bij een complete uitwerking.

De complete uitwerking en de lijst met alle inzenders van een juiste oplossing zijn te vinden op de website. De winnaar van deze puzzel is de klas van Miranda Hendrix-Sijben van het BC Broekhin in Roermond, waarvan we diverse volledige oplossingen ontvingen.

 *vakbladeuclides.nl/943olympiadepuzzel*

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Redactie
Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Sebastiaan Benders
Rob Bosch
Hugo Duivesteijn
Ernst Lambeck
Sietske Tacoma
Henk Rozenhart, voorzitter
Gerrit van Wijk

Inzenden bijdragen
Tom Goris, Gebroeders van Doornestraat 12, 5614 BN Eindhoven
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen
Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden. Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie. Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie
Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
Website: www.nvvw.nl

Voorzitter
Ebrina Smallengange
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris
Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie
Heleen van der Ree, Bladmos 23, 2914 AA Nieuwerkerk a/d IJssel
Tel. (0180) 32 10 97 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie
NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Pijlkruid 7, 4102 KE Culemborg Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap
Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt
met ingang van 1 augustus 2018
- leden: € 87,50
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 55,00
- studentleden (tot 27 jaar): € 40,00
- gepensioneerde leden € 45,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 65,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden
Abonnementen gelden steeds vanaf nr 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00
Instituten en scholen: € 150,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters
De Kleuver bedrijfscommunicatie
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2019

za 12/1
UTRECHT
Wintersymposium: Is statistiek wel betrouwbaar?
Organisatie: KWG

21/1 t/m 31/1
LANDELIJK
Eerste ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade

vr 1/2 t/m 2/2
VELDHOVEN
Nationale Wiskunde Dagen
Organisatie: Freudenthal Instituut

wo 6/2
LANDELIJK
OnderbouwWiskundeDag
Organisatie: Freudenthal Instituut

di 12/3
NIJKERK
Examenconferentie
Organisatie: NVvW

di 23/4 t/m 24/4
VELDHOVEN
Nederlands Mathematisch Congres
Organisatie: KWG en PWN

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook *vakbladeuclides.nl*

JAARGANG 94

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
4	29 januari 2019	19 november 2018
5	19 maart 2019	7 januari 2019
6	7 mei 2019	4 maart 2019
7	25 juni 2019	29 april 2019